

1

(1)

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x + xe^x \\ &= (x+1)e^x \end{aligned}$$

であるから、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$

よって、 $g(x)$ は $x=-1$ のとき、最小値 $-e^{-1}$ を取る。

(答) $-e^{-1}(x=-1)$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)e^x + 2x + 2 - e^{-2} \\ f''(x) &= (x+2)e^x + 2 \end{aligned}$$

である。ここで、(1)より $xe^x > -\frac{1}{e}$ であるから

$$\begin{aligned} f''(x) &> -\frac{1}{e} + 2e^x + 2 \\ &> 2 - \frac{1}{e} (\because e^x > 0) \\ &> 0 (\because e > 1) \end{aligned}$$

を得る。よって題意は示された。

(証明終)

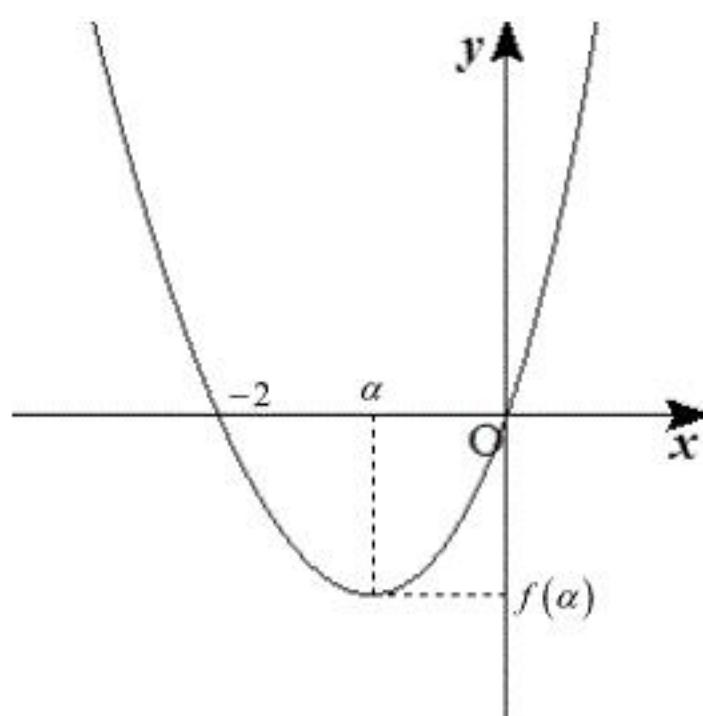
(3)

$$f(x) = x\{e^x + x + (2 - e^{-2})\}$$

であるから、 $x=0, -2$ のとき $f(x)=0$ となる。また(2)より $f'(x)$ は単調増加であり、

$$\begin{aligned} f'(0) &= 3 - \frac{1}{e^2} > 0 \\ f'(-1) &= -\frac{1}{e^2} < 0 \end{aligned}$$

となるから、 $f'(\alpha)=0$ を満たす α が $-1 < \alpha < 0$ に存在する。よって $f(x)$ の概形は以下の図のようになる。



(答) 前図

(4)

求める面積は

$$\begin{aligned} -\int_{-2}^0 f(x) dx &= -\int_{-2}^0 \{xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x\} dx \\ &= -\left[xe^x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2 - e^{-2}}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \int_{-2}^0 e^x dx \\ &= \left(-\frac{2}{e^2} - \frac{8}{3} + 4 - \frac{2}{e^2} \right) + [e^x]_{-2}^0 \\ &= \frac{7}{3} - \frac{5}{e^2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{7}{3} - \frac{5}{e^2}$

(1)

(i)

$$\begin{aligned}
 37 &= 1 + 36 \\
 &= 1 + 4 + 32 \\
 &= 1 + 2^2 + 2^5
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $1 + 2^2 + 2^5$

(ii)

例えば自然数の一つ 22 について、これを 2 進数で表すと 10110 となるので、 A の相違なる要素の合計で 22 を表すと

$$22 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$$

となる。つまりある自然数を A の相違なる要素の合計で表すには、まずその自然数を 2 進数で表し、 $(n$ 桁目の数字) $\times 2^{n-1}$ を全ての n について足していけばよい。よって全ての自然数は相違なる形で 2 進数で表すことができるから、全ての自然数は A の相違なるいくつかの要素の和として表すことができることが示された。

(証明終)

(2)

(i)

$$\begin{aligned}
 23 &= 6 + 8 + 9 \\
 46 &= 2 \cdot 23 \\
 &= 2 \cdot (6 + 8 + 9) \\
 &= 12 + 16 + 18 \\
 127 &= 3^4 + 2 \cdot 23 \\
 &= 12 + 16 + 18 + 81
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $23 = 6 + 8 + 9$, $46 = 12 + 16 + 18$, $127 = 12 + 16 + 18 + 81$

(ii)

[1] n が偶数のとき

[1-1] $n = 2$ のとき

n は明らかに問題 P の解となっている。

[1-2] $n \leq 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) を満たす全ての n が問題 P の解であると仮定するとき

$n = k + 1$ は問題 P の解であるから、

$$n = \sum_{m=1}^l a_m \text{ (ただし } a_i \in B \text{ で、 } i \neq j \Rightarrow a_i \text{ は } a_j \text{ の約数ではない)}$$

と表される。よって

$$\begin{aligned}
 2k + 2 &= 2n \\
 &= \sum_{i=1}^l 2a_i
 \end{aligned}$$

となるが、 $2a_i \in B$ で $i \neq j \Rightarrow 2a_i$ は $2a_j$ の約数ではない。なぜなら $i \neq j \Rightarrow a_i$ は a_j の約数ではないので、 $2a_i$ は $2a_j$ の約数ではないということも成り立つからである。よって $n = 2(k + 1)$ のときも問題 P の解となる。

[1-1], [1-2]により全ての偶数は問題 P の解となる。

[2] n が奇数のとき

[2-1] $n = 1$ のとき

n は明らかに問題 P の解となっている。

[2-2] $n \leq 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) を満たす全ての n が問題 P の解であると仮定するとき

$$3^m \leq 2k + 1 \leq 3^{m+1} - 1$$

を満たす m を考える。ここで $X = 2k + 1 - 3^m$ とすると、 $X \leq 2k$ かつ X は偶数であるから、[1]より X は問題 P の解であるから、

$$X = \sum_{m=1}^l 2a_m \text{ (ただし } a_i \in B \text{ で、 } i \neq j \Rightarrow 2a_i \text{ は } 2a_j \text{ の約数ではない)}$$

と表される。また

$$X \leq 3^{m+1} - 3^m - 1 = 2 \cdot 3^m - 1$$

であるから、 3^m は $2a_i$ の約数ではない。よって $n = 2k + 1$ も問題 P の解である。

[2-1], [2-2]により全ての奇数は問題 P の解となる。

以上のことから、全ての自然数は問題 P の解であることが示された。

(証明終)