

(1)

 $f(x) = x \log x$ とおく。

$$f'(x) = \log x + 1$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1
$f'(x)$	/	-	0	+	/
$f(x)$	/	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	/

また、 $0 < x < 1$ において $\log x < 0$, $x > 0$ であるから、この範囲において $x \log x < 0$ である。よって $x \log x$ は $0 < x < 1$ において $-\frac{1}{e} \leq x \log x < 0$ を満たす。

(証明終)

(2)

 $g(x) = \sqrt{x} \log x$ とおく。

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\log x + 2)$$

であるから、 $g(x)$ の増減は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1
$g'(x)$	/	-	0	+	/
$g(x)$	/	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	/

よって、 $0 < x < 1$ において $-\frac{2}{e} \leq \sqrt{x} \log x$ であるから、両辺に $\sqrt{x} (> 0)$ をかけることにより

$$-\frac{2}{e} \sqrt{x} \leq x \log x$$

を得る。また(1)より $0 < x < 1$ において $x \log x < 0$ であるから、 $0 < x < 1$ において

$$-\frac{2}{e} \sqrt{x} \leq x \log x < 0$$

となることが示された。

(証明終)

また、ここで

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{2}{e} \sqrt{x} \right) = 0$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

となる。

(答) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$

(3)

求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_a^1 (x \log x)^2 dx &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 (\log x)^2 \right]_a^1 - \pi \int_a^1 \frac{2}{3} x^2 \log x dx \\ &= -\frac{\pi \alpha^3}{3} (\log \alpha)^2 - \frac{2}{3} \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \log x \right]_a^1 - \frac{2}{3} \pi \int_a^1 \frac{1}{3} x^2 dx \\ &= \pi \left\{ -\frac{\alpha^3}{3} (\log \alpha)^2 + \frac{2\alpha^3}{9} \log \alpha + \frac{2}{27} - \frac{2\alpha^3}{27} \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi \left\{ -\frac{\alpha^3}{3} (\log \alpha)^2 + \frac{2\alpha^3}{9} \log \alpha + \frac{2}{27} - \frac{2\alpha^3}{27} \right\}$$

(4)

(3)より

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \rightarrow +0} \pi \left\{ -\frac{\alpha^3}{3} (\log \alpha)^2 + \frac{2\alpha^3}{9} \log \alpha + \frac{2}{27} - \frac{2\alpha^3}{27} \right\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \pi \left\{ -\frac{\alpha}{3} (\alpha \log \alpha)^2 + \frac{2\alpha^2}{9} (\alpha \log \alpha) + \frac{2}{27} - \frac{2\alpha^3}{27} \right\} \\ &= \frac{2}{27} \pi \left(\because \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha \log \alpha = 0 \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{27} \pi$

(1)

任意の点 (x, y) は行列 A によって

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

に移る。 (x, y) が第一象限の任意の点である時、 $(ax+by, cx+dy)$ が第一象限の点となるのは

$$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0 \text{ (ただし } a=b=0, c=d=0 \text{ とはならない)}$$

の時である。この条件のもと、 (x, y) が第二象限の任意の点である時、 $(ax+by, cx+dy)$ が第二象限の点となるのは

$$a > 0, b=c=0, d > 0$$

の時となる。

(答) $a > 0, b=c=0, d > 0$

(2)

(1)より

$$\begin{cases} u = ax \\ v = dy \end{cases}$$

であるから、これを $uv = 2xy$ に代入して整理すると

$$\begin{aligned} ax \cdot dy &= 2xy \\ \Leftrightarrow xy(2-ad) &= 0 \end{aligned}$$

となる。上式は x, y の値によらず成り立つから、

$$ad = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。また Q の座標は (a, d) であるから、 $\triangle OPQ$ の面積は

$$\frac{1}{2}|ax-dy|$$

となる。これが 4 に等しいから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|a-d| &= 4 \\ \Leftrightarrow |a-d| &= 8 \\ \therefore a &= d \pm 8 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①、②を満たす (a, d) を求めると

$$(a, d) = (4+3\sqrt{2}, -4+3\sqrt{2}), (-4+3\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2})$$

となる。よって

$$A = \begin{pmatrix} \pm 4+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \mp 4+3\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ (複合同順)}$$

である。

$$\text{(答)} \quad A = \begin{pmatrix} \pm 4+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \mp 4+3\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ (複合同順)}$$