

(1)

p は素数であるから、 p^a の約数は $1, p, p^2, \dots, p^a$ である。よって、

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= 1 + p + p^2 + \dots + p^a \\ &= \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

(2)

p と q は素数であるから、 $p^a q^b$ の約数は $p^k q^l$ と表せる。

(ただし、 k, l は $0 \leq k \leq a, 0 \leq l \leq b$ を満たす整数)

また、 $p^k q^l$ の中に等しいものがあるとすると、 $p \neq q$ より素因数分解の一意性に反するため、これらは全て異なる約数となる。よって、

$$\sigma(nm) = \sum_{k=0}^a p^k (q^0 + q^1 + \dots + q^b)$$

と表されるので、

$$\begin{aligned}\sigma(nm) &= \sigma(m) \sum_{k=0}^a p^k \\ &= \sigma(m) (p^0 + p^1 + \dots + p^a) \\ &= \sigma(n) \sigma(m)\end{aligned}$$

が導かれる。

(証明終)

(3)

$a=1$ とすると、 $2^a - 1 = 1$ は素数とならないため、 $a \geq 2$ として考えてよい。すると $2^a - 1 \geq 3$ であるから、 2 と $2^a - 1$ は相異なる素数であり、 $a-1$ と 1 は正の整数なので、(2) で得られた式を用いることができる。よって、

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^{a-1}) \sigma(2^a - 1) \\ &= \frac{2^a - 1}{2 - 1} \cdot (1 + 2^a - 1) \\ &= 2^a (2^a - 1) \\ &= 2 \cdot 2^{a-1} (2^a - 1) \\ &= 2n\end{aligned}$$

が導かれる。

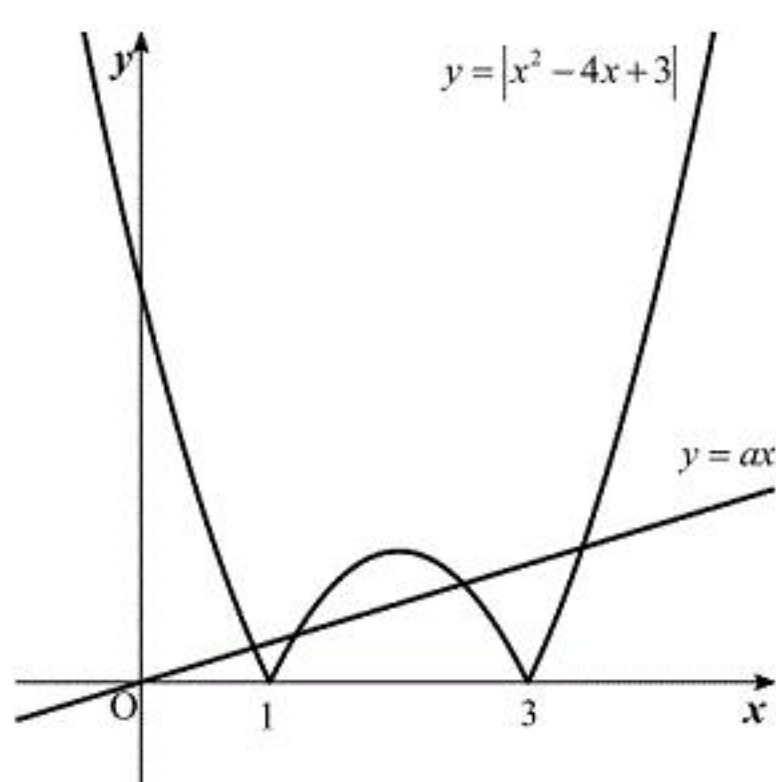
(証明終)

(1)

 $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ より,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq 1, 3 \leq x) \\ -x^2 + 4x - 3 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

であるから, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点を 4 つもつのは, 次図のようになるときである。



次に, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $1 \leq x \leq 3$ の範囲で接するときを考える。

$$-x^2 + 4x - 3 = ax \quad \dots \textcircled{1}$$

の判別式を D とおくと, 2 式が接する条件は

$$D = 0 \Leftrightarrow (a-4)^2 - 12 = 0$$

$$\therefore a = 4 \pm 2\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。このとき, ①の重解は $x = \frac{4-a}{2}$ であり, ②のうち $1 \leq \frac{4-a}{2} \leq 3$ を満たすものは

$a = 4 - 2\sqrt{3}$ である。以上より, 求める a の範囲は

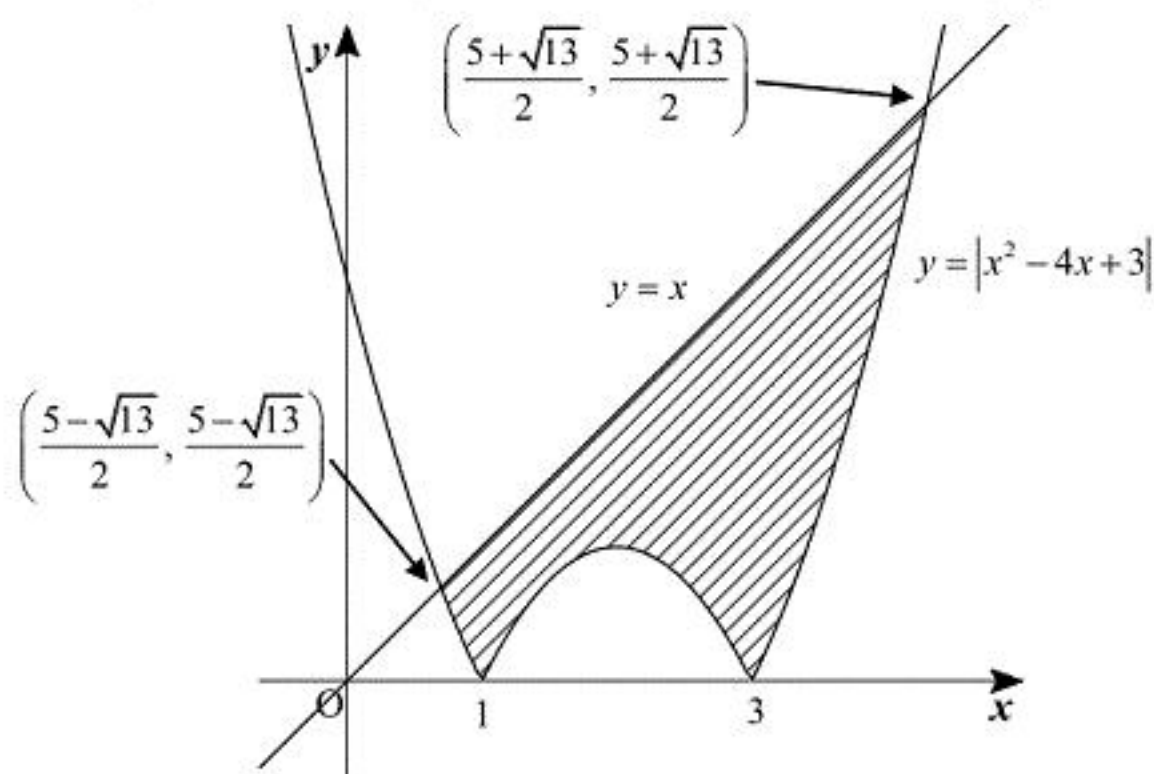
$$0 < a < 4 - 2\sqrt{3}$$

である。

(答) $0 < a < 4 - 2\sqrt{3}$

(2)

$4 - 2\sqrt{3} < 1$ より, 不等式の表す領域は次図の斜線部のようになる。(境界含む)



$y = x$ と $y = x^2 - 4x + 3$ の交点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 3 = x$$

を解いて,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

である。よって, この領域の面積は

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}} (x - |x^2 - 4x + 3|) dx \\ &= \int_{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}} \left(x - \left(x - \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right) \left(x - \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right) \right) dx - 2 \int_{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}} -(x-1)(x-3) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2} - \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right)^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} (3-1)^3 \\ &= \frac{13\sqrt{13} - 16}{6} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{13\sqrt{13} - 16}{6}$

(1)

$3x^2 - 6x + 2 = 0$ の解は、解の公式を用いて

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

である。よって、確かに2つの相異なる実数解をもち、いずれも0でない。

(証明終)

(2)

(i)

解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

である。

$$\begin{aligned} A_1 &= (\alpha^{-1} + \beta^{-1})(\alpha + \beta)^1 \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta} \\ &= 6 \\ A_2 &= (\alpha^{-2} + \beta^{-2})(\alpha + \beta)^2 \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} (\alpha + \beta)^2 \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} (\alpha + \beta)^2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

より、確かに A_1, A_2 は整数となる。

(証明終)

(ii)

(i)より、 $n=1, 2$ のとき A_n は整数となる。

$n=k, k+1$ (k は自然数) のとき A_n が整数であることを仮定すると、

$$\begin{aligned} A_{k+2} &= \frac{\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}}{(\alpha\beta)^{k+2}} (\alpha + \beta)^{k+2} \\ &= \frac{(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k)}{(\alpha\beta)^{k+2}} (\alpha + \beta)^{k+2} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta} \left\{ \frac{\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}}{(\alpha\beta)^{k+1}} (\alpha + \beta)^{k+1} - \frac{\alpha^k + \beta^k}{(\alpha\beta)^k} (\alpha + \beta)^k \right\} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta} (A_{k+1} - A_k) \\ &= 6(A_{k+1} - A_k) \end{aligned}$$

より、 $n=k+2$ のときも A_n は整数となる。よって、数学的帰納法より題意は示された。

(証明終)