

(1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq 1, 3 \leq x) \\ -x^2 + 4x - 3 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

であるから、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点を 4 つもつのは

次図のようになるときである。

図より、 a の下限は 0 である。

a の上限は $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $1 \leq x \leq 3$ の範囲で接するときである。

$$-x^2 + 4x - 3 = ax$$

の判別式を D とおくと、

2 式が接する条件は

$$D = (a - 4)^2 - 12 = 0$$

を解いて

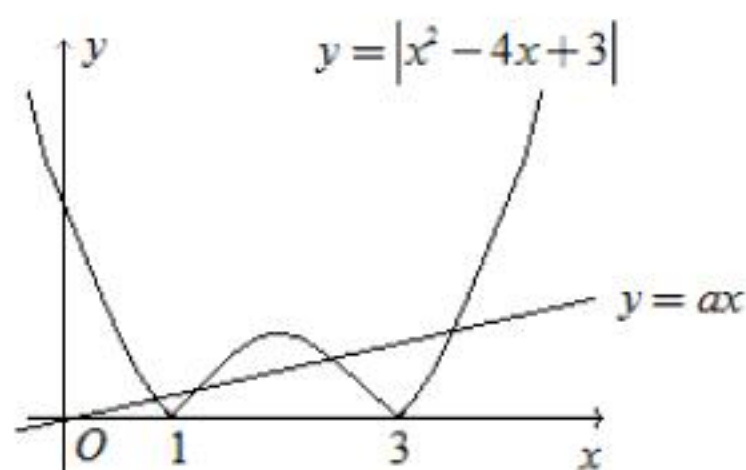
$$a = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

このうち、接点の x 座標 $\frac{4-a}{2}$ が $1 \leq x \leq 3$ の範囲にあるものは $a = 4 - 2\sqrt{3}$

以上より、求める a の範囲は

$$0 < a < 4 - 2\sqrt{3}$$

である。



(答) $0 < a < 4 - 2\sqrt{3}$

(2)

$4 - 2\sqrt{3} < 1$ より、不等式の表す領域は次図斜線部のようになる。(境界含む)

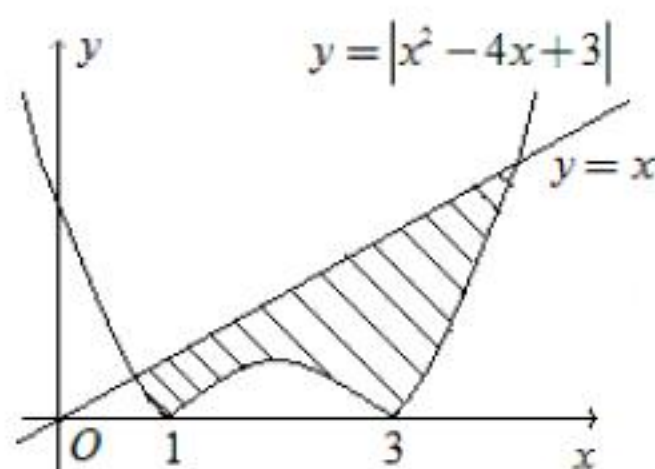
$y = x$ と $y = x^2 - 4x + 3$ の

交点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 3 = x$$

を解いて

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$



よって、この領域の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}} (x - |x^2 - 4x + 3|) dx &= \int_{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}} (-x^2 + 5x - 3) dx - 2 \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2} - \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right)^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} (3-1)^3 \\ &= \frac{13\sqrt{13} - 16}{6} \end{aligned}$$

(答) $\frac{13\sqrt{13} - 16}{6}$

(1)

 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ の解は、解の公式を用いて

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

よって、確かに 2 つの相異なる実数解をもち、いずれも 0 でない。

(証明終)

(2)

解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

(i)

$$A_1 = (\alpha^{-1} + \beta^{-1})(\alpha + \beta)^1$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha \beta}$$

$$= 6$$

$$A_2 = (\alpha^{-2} + \beta^{-2})(\alpha + \beta)^2$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha \beta)^2} (\alpha + \beta)^2$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \beta}{(\alpha \beta)^2} (\alpha + \beta)^2$$

$$= 24$$

より、確かに A_1, A_2 は整数となる。

(証明終)

(ii)

(i) より、 $n=1, 2$ のとき A_n は整数となる。 $n=k, k+1$ (k は自然数) のとき A_n が整数であることを仮定すると、

$$A_{k+2} = \frac{\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}}{(\alpha \beta)^{k+2}} (\alpha + \beta)^{k+2}$$

$$= \frac{(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha \beta (\alpha^k + \beta^k)}{(\alpha \beta)^{k+2}} (\alpha + \beta)^{k+2}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha \beta} (A_{k+1} - A_k)$$

$$= 6(A_{k+1} - A_k)$$

より、 $n=k+2$ のときも A_n は整数となる。

よって、数学的帰納法より題意は示された。

(証明終)

(1)

三平方の定理より

$$\begin{cases} AB^2 = a^2 + 16 \\ AC^2 = a^2 + 9 \end{cases}$$

よって、三角形 ABC に余弦定理を用いて

$$25 = a^2 + 16 + a^2 + 9 - 2\sqrt{a^2 + 16} \cdot \sqrt{a^2 + 9} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + 16)(a^2 + 9)}}$$

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + 16)(a^2 + 9)}}$$

(2)

 $\sin \theta > 0$ より、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sqrt{25a^2 + 144}}{\sqrt{(a^2 + 16)(a^2 + 9)}} \end{aligned}$$

よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 16} \cdot \sqrt{a^2 + 9} \sin \theta = \frac{\sqrt{25a^2 + 144}}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{25a^2 + 144}}{2}$$

(3)

 $OB^2 + OC^2 = BC^2$ より、三角形 OBC は直角三角形であるので、この面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

である。同様に、三角形 OAB と三角形 OAC の面積はそれぞれ

$$2a, \quad \frac{3}{2}a$$

である。よって四面体 OABC の体積は、球 S_1 の半径を r とおくと

$$\frac{1}{3} r \left(6 + 2a + \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{25a^2 + 144}}{2} \right) = \frac{r}{6} (7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144})$$

と表される。また、三角形 OBC を底面、高さを OA とみると

$$6 \cdot a \cdot \frac{1}{3} = 2a$$

とも表されるので

$$\frac{r}{6} (7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144}) = 2a$$

が成り立つ。よって、

$$r = \frac{12a}{7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144}}$$

$$(\text{答}) \quad r = \frac{12a}{7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144}}$$

(4)

 $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,3)$ となるように座標を定める。球 S_2 の中心を $O'(x,y,z)$ とおくと、

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$$

が成り立つ。これは

$$x^2 = (x-a)^2, \quad y^2 = (y-4)^2, \quad z^2 = (z-3)^2$$

と同値であるので、これを解くと、

$$x = \frac{1}{2}a, \quad y = 2, \quad z = \frac{3}{2}$$

これより球 S_2 の半径は

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 25}}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{a^2 + 25}}{2}$$