

(1)

 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ の解は、解の公式を用いて

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

よって、確かに 2 つの相異なる実数解をもち、いずれも 0 でない。

(証明終)

(2)

解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

(i)

$$A_1 = (\alpha^{-1} + \beta^{-1})(\alpha + \beta)^1$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha \beta}$$

$$= 6$$

$$A_2 = (\alpha^{-2} + \beta^{-2})(\alpha + \beta)^2$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha \beta)^2} (\alpha + \beta)^2$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \beta}{(\alpha \beta)^2} (\alpha + \beta)^2$$

$$= 24$$

より、確かに A_1, A_2 は整数となる。

(証明終)

(ii)

(i) より、 $n=1, 2$ のとき A_n は整数となる。 $n=k, k+1$ (k は自然数) のとき A_n が整数であることを仮定すると、

$$A_{k+2} = \frac{\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}}{(\alpha \beta)^{k+2}} (\alpha + \beta)^{k+2}$$

$$= \frac{(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha \beta (\alpha^k + \beta^k)}{(\alpha \beta)^{k+2}} (\alpha + \beta)^{k+2}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha \beta} (A_{k+1} - A_k)$$

$$= 6(A_{k+1} - A_k)$$

より、 $n=k+2$ のときも A_n は整数となる。

よって、数学的帰納法より題意は示された。

(証明終)

(1)

三平方の定理より

$$\begin{cases} AB^2 = a^2 + 16 \\ AC^2 = a^2 + 9 \end{cases}$$

よって、三角形 ABC に余弦定理を用いて

$$25 = a^2 + 16 + a^2 + 9 - 2\sqrt{a^2 + 16} \cdot \sqrt{a^2 + 9} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + 16)(a^2 + 9)}}$$

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + 16)(a^2 + 9)}}$$

(2)

 $\sin \theta > 0$ より、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sqrt{25a^2 + 144}}{\sqrt{(a^2 + 16)(a^2 + 9)}} \end{aligned}$$

よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 16} \cdot \sqrt{a^2 + 9} \sin \theta = \frac{\sqrt{25a^2 + 144}}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{25a^2 + 144}}{2}$$

(3)

 $OB^2 + OC^2 = BC^2$ より、三角形 OBC は直角三角形であるので、この面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

である。同様に、三角形 OAB と三角形 OAC の面積はそれぞれ

$$2a, \quad \frac{3}{2}a$$

である。よって四面体 OABC の体積は、球 S_1 の半径を r とおくと

$$\frac{1}{3} r \left(6 + 2a + \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{25a^2 + 144}}{2} \right) = \frac{r}{6} (7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144})$$

と表される。また、三角形 OBC を底面、高さを OA とみると

$$6 \cdot a \cdot \frac{1}{3} = 2a$$

とも表されるので

$$\frac{r}{6} (7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144}) = 2a$$

が成り立つ。よって、

$$r = \frac{12a}{7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144}}$$

$$(\text{答}) \quad r = \frac{12a}{7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144}}$$

(4)

 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 3)$ となるように座標を定める。球 S_2 の中心を $O'(x, y, z)$ とおくと、

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$$

が成り立つ。これは

$$x^2 = (x-a)^2, \quad y^2 = (y-4)^2, \quad z^2 = (z-3)^2$$

と同値であるので、これを解くと、

$$x = \frac{1}{2}a, \quad y = 2, \quad z = \frac{3}{2}$$

これより球 S_2 の半径は

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 25}}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{a^2 + 25}}{2}$$

(1)

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = \sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

より, $f'(x) = 0$ となるのは

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \text{ のとき, つまり}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi \text{ のとき (} n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数)}$$

よって極値は

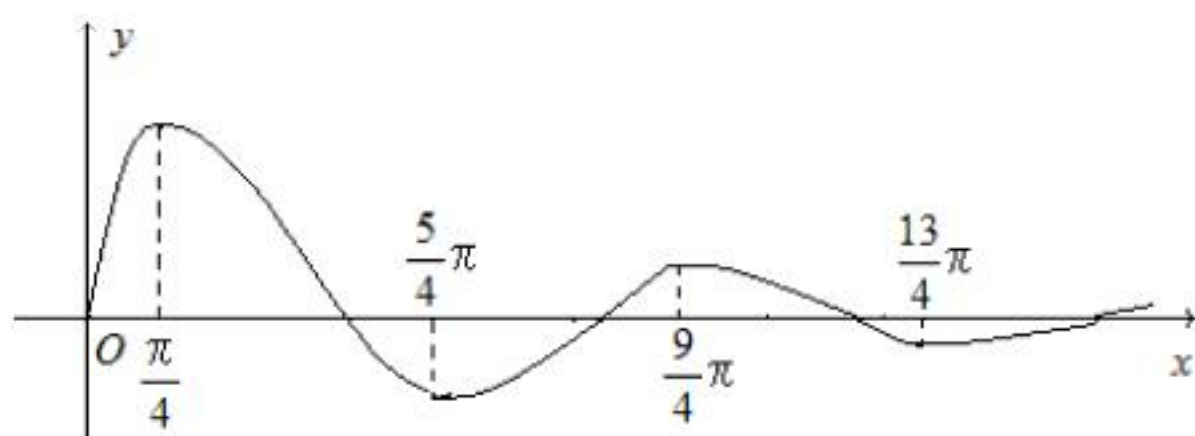
$$f \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right)} \sin \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right)}$$

$$\text{(答) 極値 } \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right)}, \quad x = \frac{\pi}{4} + n\pi \text{ (} n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数)}$$

(2)

$y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。

極値の絶対値が n の増加に伴い, 単調減少することに注意する。



$f(x) = k$ の解の個数は, $y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの交点の個数に等しい。

(i) $k \geq 0$ のとき

グラフより, 交点の個数が 4 つになるのは

$$f \left(\frac{17}{4} \pi \right) < k < f \left(\frac{9}{4} \pi \right) \text{ のとき, つまり}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{17}{4} \pi} < k < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{9}{4} \pi} \text{ のとき}$$

(ii) $k < 0$ のとき

グラフより, 交点の個数が 4 つになるのは

$$f \left(\frac{13}{4} \pi \right) < k < f \left(\frac{21}{4} \pi \right) \text{ のとき, つまり}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{13}{4} \pi} < k < -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{21}{4} \pi} \text{ のとき}$$

以上から, 求める k の値の範囲は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{13}{4} \pi} < k < -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{21}{4} \pi}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{17}{4} \pi} < k < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{9}{4} \pi}$$

$$\text{(答)} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{13}{4} \pi} < k < -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{21}{4} \pi}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{17}{4} \pi} < k < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{9}{4} \pi}$$