

(1) 点 P, Q, R の座標をそれぞれ (x_P, y_P) , (x_Q, y_Q) , (x_R, y_R) とする。

これらは行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ により, 点 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ が移った先なので

$$\begin{pmatrix} x_P & x_Q & x_R \\ y_P & y_Q & y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ c & d & c+d \end{pmatrix}$$

が成り立つ。PQ の長さが 2 であるので,

$$\begin{aligned} (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 &= 2^2 \\ \Leftrightarrow (b - a)^2 + (d - c)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ab + cd) &= 4 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

QR の長さが 1, RP の長さが $\sqrt{3}$ であるので, 同様にして

$$\begin{aligned} (x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2 &= 1^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + c^2 &= 1 \quad \cdots \textcircled{2} \\ (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 &= (\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow b^2 + d^2 &= 3 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

②, ③を①に代入して

$$\begin{aligned} 1 + 3 - 2(ab + cd) &= 4 \\ \Leftrightarrow ab + cd &= 0 \end{aligned}$$

以上より, 題意は示された。

(証明終)

(2) (1)の結果より

$$ab = -cd$$

両辺を 2 乗して

$$a^2 b^2 = c^2 d^2$$

②, ③を代入して

$$\begin{aligned} (1 - c^2)b^2 &= c^2(3 - b^2) \\ \Leftrightarrow b^2 &= 3c^2 \\ \therefore b &= \pm\sqrt{3}c \end{aligned}$$

(i) $b = \sqrt{3}c$ のとき

$$\begin{aligned} ab &= -cd \\ \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{3}c &= -cd \\ \Leftrightarrow d &= -\sqrt{3}a \quad \text{または} \quad c = 0 \end{aligned}$$

(a) $d = -\sqrt{3}a$ のとき

$$\begin{aligned} ad - bc &= -\sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}c^2 \\ &= -\sqrt{3}(a^2 + c^2) \\ &= -\sqrt{3} \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

であり, 条件 $ad - bc < 0$ を満たす。

(b) $c = 0$ のとき

$$a^2 = 1, b = 0, d^2 = 3$$

である。このうち, $ad - bc < 0$ を満たすものは

$$(a, d) = (1, -\sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}) \text{ であり, いずれも } d = -\sqrt{3}a \text{ を満たす。}$$

(ii) $b = -\sqrt{3}c$ のとき, 同様にして

$$d = \sqrt{3}a \quad \text{または} \quad c = 0$$

(a) $d = \sqrt{3}a$ のとき

$$\begin{aligned} ad - bc &= \sqrt{3}a^2 - (-\sqrt{3}c^2) \\ &= \sqrt{3}(a^2 + c^2) \\ &= \sqrt{3} \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

となり, 条件 $ad - bc < 0$ を満たさない。

(b) $c = 0$ のときは (i) に含まれる。

以上より,

$$b = \sqrt{3}c, d = -\sqrt{3}a$$

$$(\text{答}) \quad b = \sqrt{3}c, d = -\sqrt{3}a$$

(3) $ad - bc < 0$ より, (2)の答を利用すると

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}c \\ c & -\sqrt{3}a \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

よって, 与えられた式を計算すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}c \\ c & -\sqrt{3}a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a + \sqrt{3}c \\ -\sqrt{3}a + 3c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} 3a + \sqrt{3}c = -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}a + 3c = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

これを解いて

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{2}, c = \frac{1}{2}$$

(*) にこれを代入して

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(1) $f(x) = \log(x^2 + 1)$ の両辺を x で微分して、

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (x \geq 0)$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} \quad (x \geq 0)$$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

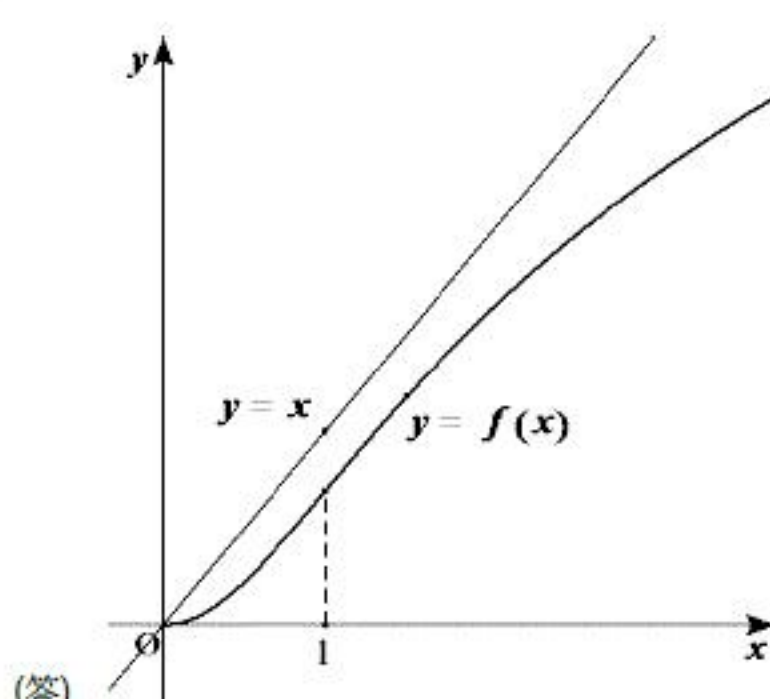
x	0		1	
$f'(x)$	0	+	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	0			

また、 $g(x) = x - \log(x^2 + 1)$ とおくと、

$$g'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$$

より、 $g(x)$ は単調増加する。 $g(0) = 0$ に注意すると、 $g(x) \geq 0$ ($x \geq 0$) なので
 $y = x$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフよりも常に上側にある。

さらに、 $g'(1) = 0$ に注意してグラフを描くと、次図のようになる。



(2) 求める面積は

$$\int_0^a \log(x^2 + 1) dx$$

と表される。部分積分を用いて

$$= \left[x \cdot \log(x^2 + 1) \right]_0^a - \int_0^a \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$= a \log(a^2 + 1) - 2 \int_0^a \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx$$

$$= a \log(a^2 + 1) - 2 \int_0^a dx + 2 \int_0^a \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$= a \log(a^2 + 1) - 2a + 2S(a)$$

$$(\text{答}) \quad a \log(a^2 + 1) - 2a + 2S(a)$$

(3) 直線 $y = x$ に関する対称移動を考える。

この対称移動により、点 (X, Y) が点 (X', Y') に移ったとする。

2点の midpoint は直線 $y = x$ 上にあるので

$$\frac{X + X'}{2} = \frac{Y + Y'}{2}$$

$$\Leftrightarrow X + X' = Y + Y' \quad \cdots \textcircled{1}$$

2点を結ぶ直線は直線 $y = x$ に直交するので、その傾きは -1 である。

$$\frac{Y' - Y}{X' - X} = -1$$

$$\Leftrightarrow X - X' = Y' - Y \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を解いて

$$X' = Y, \quad Y' = X$$

よって、曲線 C を直線 $y = x$ に関して対称移動した曲線は

$$x = \log(y^2 + 1) \quad (y \geq 0)$$

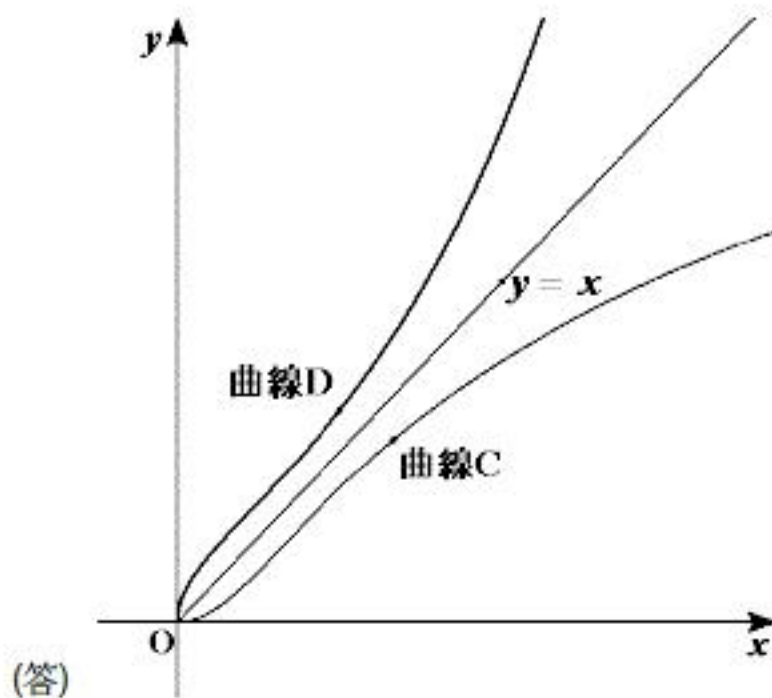
と表される。これを変形すると、

$$e^x = y^2 + 1 \quad (y \geq 0)$$

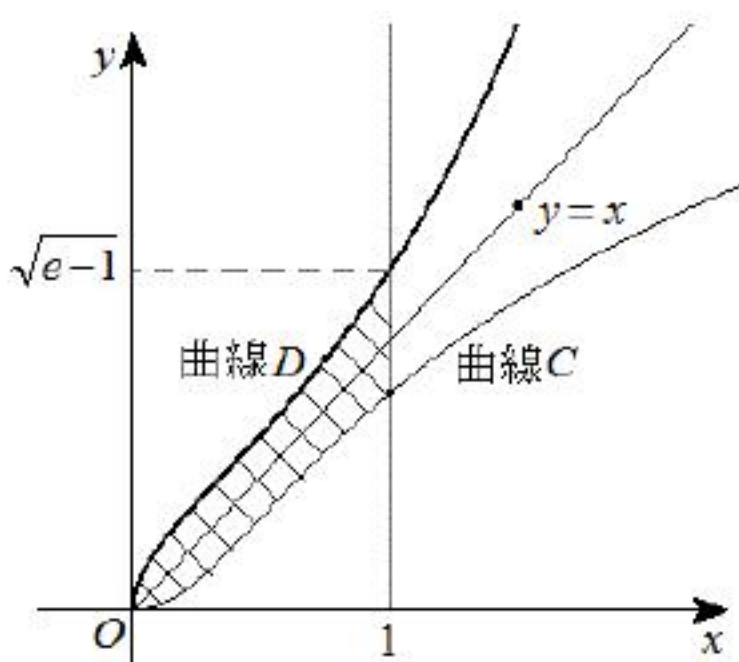
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{e^x - 1} \quad (x \geq 0)$$

$$(\text{答}) \quad y = \sqrt{e^x - 1} \quad (x \geq 0)$$

また曲線 D の概形は、次図のようになる。



(4) 求めるのは次図斜線部の面積である。



この図形は、

x 軸、 y 軸、直線 $x = 1$ 、直線 $y = \sqrt{e-1}$ で囲まれる長方形 $\cdots$ (A) から

x 軸、直線 $x = 1$ 、曲線 C で囲まれる図形 $\cdots$ (B) と

y 軸、直線 $y = \sqrt{e-1}$ 、曲線 D で囲まれる図形 $\cdots$ (C)

を除いたものである。

(A) の面積は $\sqrt{e-1}$

(B) の面積は、(2) の答より $\log 2 - 2 + 2S(1)$

(C) の面積は、 $y = x$ に関する対称性を考慮して、(2) の答で

$$\alpha = \sqrt{e-1} \text{ とおいたものに等しく } -\sqrt{e-1} + 2S(\sqrt{e-1})$$

よって、求める面積は

$$\sqrt{e-1} - \{\log 2 - 2 + 2S(1)\} - \{-\sqrt{e-1} + 2S(\sqrt{e-1})\}$$

$$= 2\sqrt{e-1} + 2 - \log 2 - 2S(1) - 2S(\sqrt{e-1})$$

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt{e-1} + 2 - \log 2 - 2S(1) - 2S(\sqrt{e-1})$$

- (1) 取り出した玉に 3 回全て同じ数字が書かれている確率を求めればよい。

全て 1 を取り出す場合

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

全て 2 を取り出す場合

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

全て 3 または 4 または 5 の場合も同様に $\frac{1}{216}$

よって求める確率は

$$\frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{18}$$

(答) $\frac{1}{18}$

- (2) 取り出した玉のうち 2 回同じ数字が書かれており、
残りの 1 回は違う数字が書かれており、さらに三角形が描ける確率を求め、
(1) で求めた正三角形を描くことができる確率を加えてやればよい。

1 が 2 回の場合 二等辺三角形を描くことはできない。

2 が 2 回の場合 残りの 1 回が 1 か 3 であればよい。

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) + {}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24}$$

(3 or 4 or 5) が 2 回の場合 残りの 1 回は自分以外の数字であればよい。

$$\text{それぞれ } {}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) + {}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot 3 = \frac{5}{72}$$

よって、正三角形でない二等辺三角形を描くことができる確率は

$$\frac{1}{24} + \frac{5}{72} \cdot 3 = \frac{1}{4}$$

であり、したがって求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{11}{36}$$

(答) $\frac{11}{36}$

- (3) 正三角形と二等辺三角形が描ける確率は求めたので、
全ての辺の長さが異なる三角形が描ける確率を求めればよい。
そのような辺の組み合わせは以下の通り。

$$(2, 3, 4), (2, 4, 5), (3, 4, 5)$$

この確率はそれぞれ

$$3! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36} \cdot 3 = \frac{7}{18}$$

(答) $\frac{7}{18}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} \quad \cdots (*)$$

(*) を満たす正の整数の組 (x, y) を求める。

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)p = xy \quad \cdots (\#)$$

(#) より, p が素数であることを考えると

x, y の少なくともどちらか一方は p の倍数であるといえる。

(a) x, y とともに p の倍数であるとき

$x = \alpha p, y = \beta p$ (α, β は正の整数) とおくと,

$$(\#) \Leftrightarrow (\alpha p + \beta p)p = \alpha p \cdot \beta p$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)p^2 = \alpha \beta p^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha \beta - \alpha - \beta = 0 \quad (\because p \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 1$$

α, β は正の整数なので, $(\alpha, \beta) = (2, 2)$

(b) x のみ p の倍数であるとき

$x = kp$ (k は正の整数) とおくと

$$(\#) \Leftrightarrow (kp + y)p = kp \cdot y$$

$$\Leftrightarrow kp + y = ky \quad (\because p \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow kp = (k - 1)y$$

$k = 1$ とすると, $p = 0$ となり矛盾するので $k \neq 1$ である。よって,

$$y = \frac{k}{k-1} p$$

$k = 2$ とすると, (a) の議論に含まれるので, $k \geq 3$ として考える。

すると, y が正の整数であるためには, $k-1$ が p の倍数であることが必要。

$k-1 = lp$ (l は正の整数) とおくと

$$y = \frac{lp+1}{lp} p = p + \frac{1}{l}$$

であり, これが正の整数となる条件は $l = 1$

このとき, $y = p+1, k = p+1$

$$\therefore x = (p+1)p$$

(c) y のみ p の倍数であるとき

(b) と同様に考えて

$$(x, y) = (p+1, (p+1)p)$$

以上より, (*) を満たす組 (x, y) は

$$(x, y) = (2p, 2p), ((p+1)p, p+1), (p+1, (p+1)p)$$

$$(\text{答}) (x, y) = (2p, 2p), ((p+1)p, p+1), (p+1, (p+1)p)$$