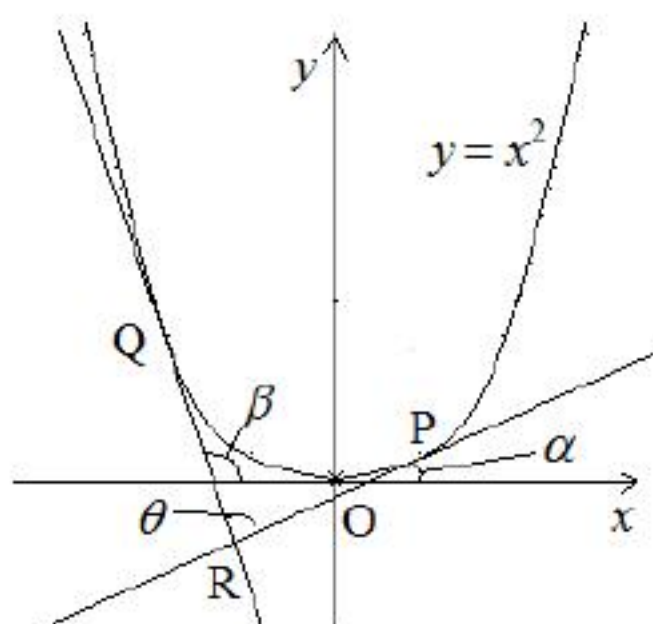


(1)



l_a と x 軸の正方向のなす角を α , l_b と x 軸の正方向のなす角を β とする。

l_a, l_b の方程式は,

$$l_a: y=2a(x-a)+a^2 \cdots \textcircled{1}, \quad l_b: y=2b(x-b)+b^2 \cdots \textcircled{2}$$

なので, $\tan \alpha = 2a$, $\tan \beta = 2b$ である。

a, b が同符号の時 $\theta = \pi + (\beta - \alpha)$, a, b が異符号の時 $\theta = \beta - \alpha$ と表されるので、
どちらの場合も

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{2(b-a)}{1+4ab}$$

$$\text{(答)} \quad \tan \theta = \frac{2(b-a)}{1+4ab}$$

(2)

R の座標を (X, Y) とおく。①, ②を連立して解くと,

$$X = \frac{a+b}{2} \cdots \textcircled{3}, \quad Y = ab \cdots \textcircled{4}$$

(1)の答に $\theta = 45^\circ$ を代入すると $1 = \frac{2(b-a)}{1+4ab}$ となり, これは

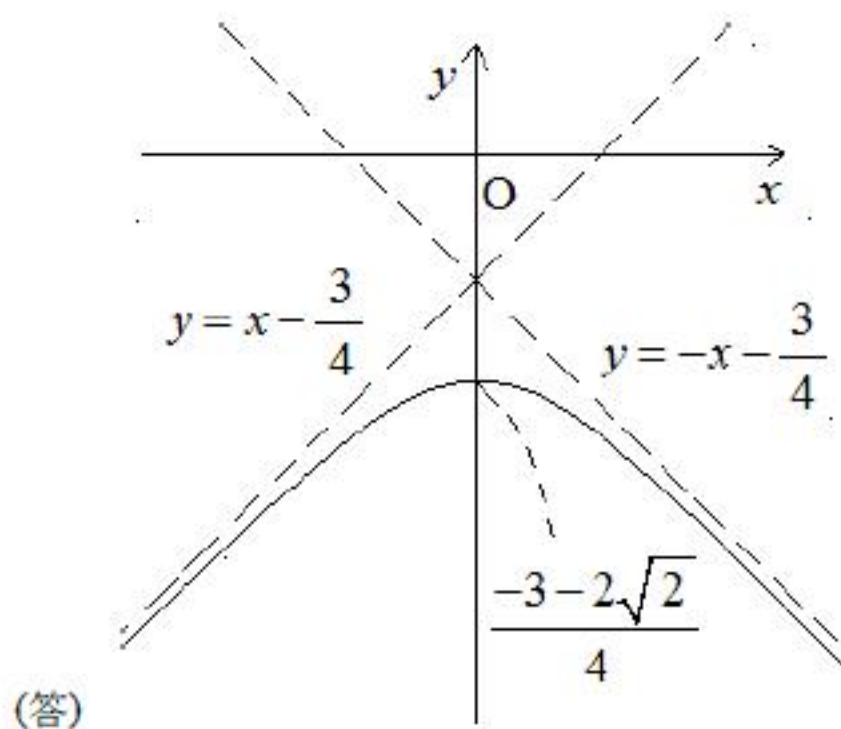
$$1 = \frac{4(b-a)^2}{(1+4ab)^2} \quad \text{かつ} \quad 1+4ab < 0$$

と同値である。これに③, ④を代入して整理すると

$$1 = \frac{4\{(2X)^2 - 4Y\}}{(1+4Y)^2} \quad \text{かつ} \quad 1+4Y < 0$$

$$\Leftrightarrow -2X^2 + 2\left(Y + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad Y < -\frac{1}{4}$$

よって, 求める R の軌跡は次図実線部のようになる。



(答)

(3)

$\tan \theta = \frac{2(b-a)}{1+4ab}$ において, a と b が有理数のとき右辺は有理数になる。

ここで, θ が 60° になると仮定すると, 左辺は $\sqrt{3}$ となり, 無理数になる。

つまり, (無理数) = (有理数) となり, 矛盾する。

よって, θ は 60° とならないことが示された。

(証明終)

(1)

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

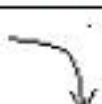
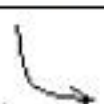
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

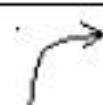
$$= -2 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) e^{-x^2}$$

$$f''(x) = (4x^3 - 6x)e^{-x^2}$$

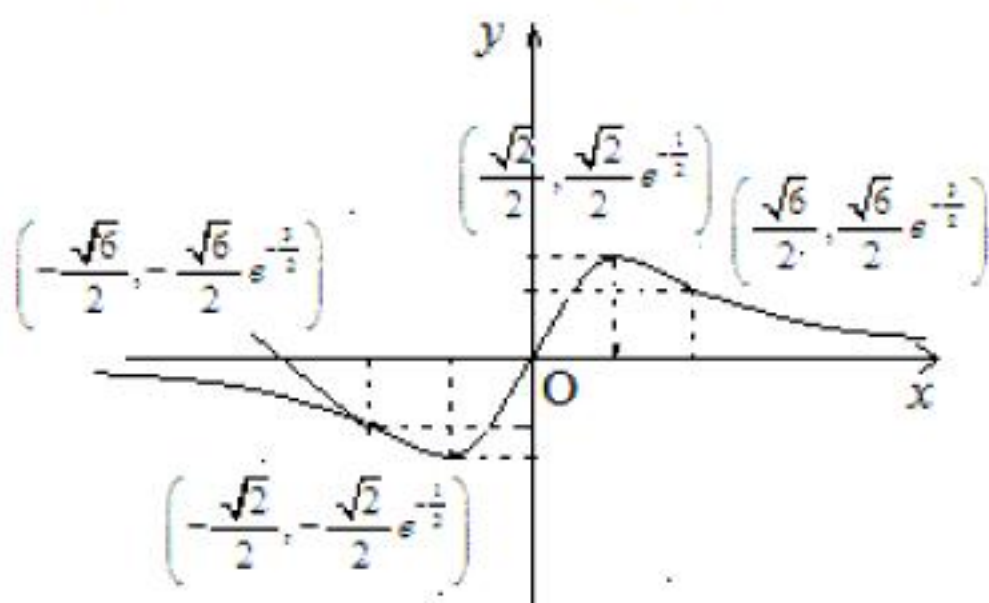
$$= 4x \left(x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) e^{-x^2}$$

となるので、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0
$f(x)$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$		0

x	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$		$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$		$\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ を考慮すると、 $y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。



(答)

(2)

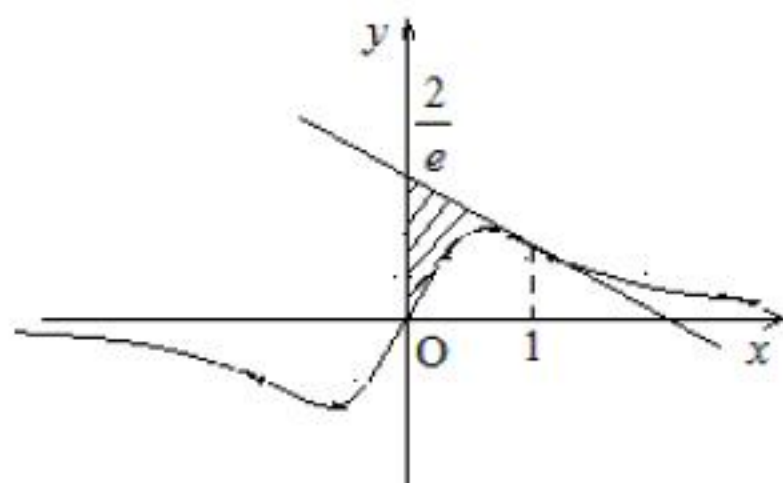
$f(1) = \frac{1}{e}$, $f'(1) = -\frac{1}{e}$ なので、求める接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$$

$$= -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$$

(答) $y = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$

(3)



求める面積は図斜線部の面積なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{e} \right) \cdot 1 - \int_0^1 xe^{-x^2} dx &= \frac{3}{2e} - \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{e} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(答) $\frac{2}{e} - \frac{1}{2}$