

(1)

$A=B=0$ となるためには、

100 円硬貨は表が 2 回、裏が 3 回出て、500 円硬貨は表が 3 回、裏が 2 回出ればよい。

それぞれの硬貨の表が出る確率と裏が出る確率は等しいので、求める確率は、

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{256}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{25}{256}$$

(2)

硬貨をそれぞれ 5 回投げたときの A, B の値として考えられるものは

$$A = -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$B = -6, -4, -2, 0, 2, 4$$

である。よって、5 回投げたときに $A=B$ になる場合、 $A(B)$ の値として考えられるものは

$$A=B=-4, -2, 0, 2, 4$$

である。以下、それぞれの場合の確率を求める。

[1] $A=B=2$ のとき

100 円硬貨は表が 3 回、裏が 2 回出て、500 円硬貨は表が 4 回、裏が 1 回出ればよい。

したがって、確率は、

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{32} = \frac{25}{512}$$

となる。

[2] $A=B=4$ のとき

100 円硬貨は表が 4 回、裏が 1 回出て、500 円硬貨は表が 5 回出ればよい。

したがって、確率は、

$${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot {}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{1024}$$

となる。

さらに、 $A=B=-2$ になる確率と $A=B=2$ になる確率は等しく、

$A=B=-4$ になる確率と $A=B=4$ になる確率が等しいので、(1)の答も用いると、

求める確率は

$$\frac{25}{256} + 2 \cdot \frac{25}{512} + 2 \cdot \frac{5}{1024} = \frac{50+50+5}{512} = \frac{105}{512}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{105}{512}$$

2

(1)

円の接線の公式を用いると、求める接線の方程式は

$$ax+by=16$$

となる。

(答) $ax+by=16$

(2)

点 (a, b) は C_1 上の点であるから、

$$a^2+b^2=16 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

(1)で求めた C_1 の接線のうち、 C_2 に接するもの、つまり C_2 の中心 $(6, 0)$ との距離が1となるものを求めればよい。点と直線の距離の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{|6a-16|}{\sqrt{a^2+b^2}} &= 1 \\ \Leftrightarrow |6a-16| &= 4 \\ \Leftrightarrow 6a-16 &= \pm 4 \\ \therefore a &= \frac{10}{3}, 2 \end{aligned}$$

①より、 $a = \frac{10}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} b^2 &= 16 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{44}{9} \\ \therefore b &= \pm \frac{2\sqrt{11}}{3} \end{aligned}$$

であり、 $a = 2$ のとき

$$\begin{aligned} b^2 &= 16 - 2^2 = 12 \\ \therefore b &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

よって、 C_1 と C_2 の両方に接する接線の方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{10}{3}x + \frac{2\sqrt{11}}{3}y &= 16, \frac{10}{3}x - \frac{2\sqrt{11}}{3}y = 16, 2x + 2\sqrt{3}y = 16, 2x - 2\sqrt{3}y = 16 \\ \therefore 5x + \sqrt{11}y &= 24, 5x - \sqrt{11}y = 24, x + \sqrt{3}y = 8, x - \sqrt{3}y = 8 \end{aligned}$$

となる。

(答) $5x + \sqrt{11}y = 24, 5x - \sqrt{11}y = 24, x + \sqrt{3}y = 8, x - \sqrt{3}y = 8$

(3)

円 C_1 または円 C_2 の内部(境界含む)に存在する点を通る任意の直線は、その点が含まれる方の円と明らかに共有点を持つ。よって、円 C_1 または円 C_2 の内部(境界含む)は、求める領域に含まれる。以下では、円 C_1 と円 C_2 の外部の点について考える。

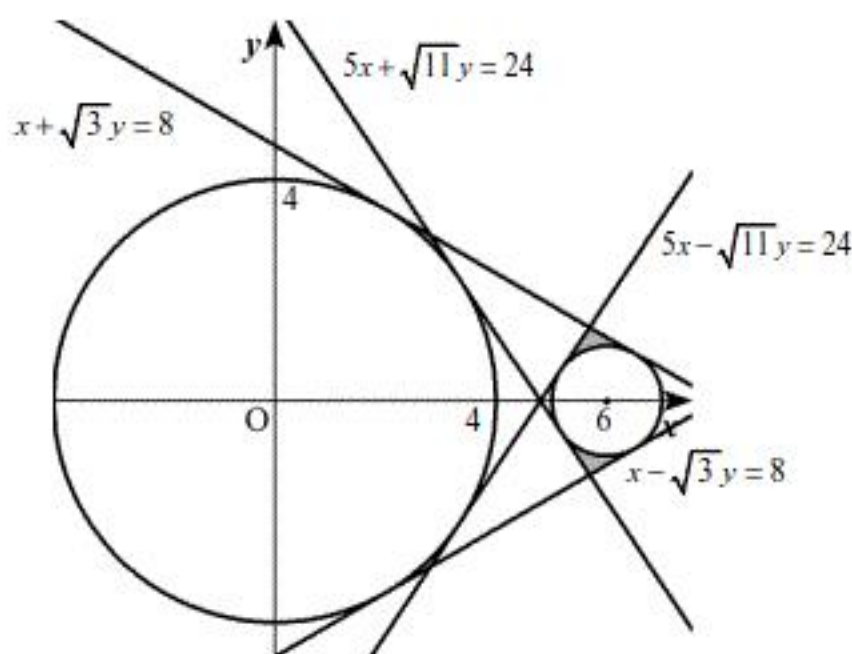
ある点 Q が、求める領域に含まれるための必要十分条件は、

Q から C_1 に引いた2本の接線が、2本とも C_2 と共有点を持ち、

なおかつ、 Q から C_2 に引いた2本の接線が、2本とも C_1 と共有点を持つ

ことである。なぜなら、もしこれが成り立たなければ、その接線の傾きを無限小変化させることで、 C_1 と C_2 のどちらとも共有点を持たずに Q を通る直線が作れるからである。

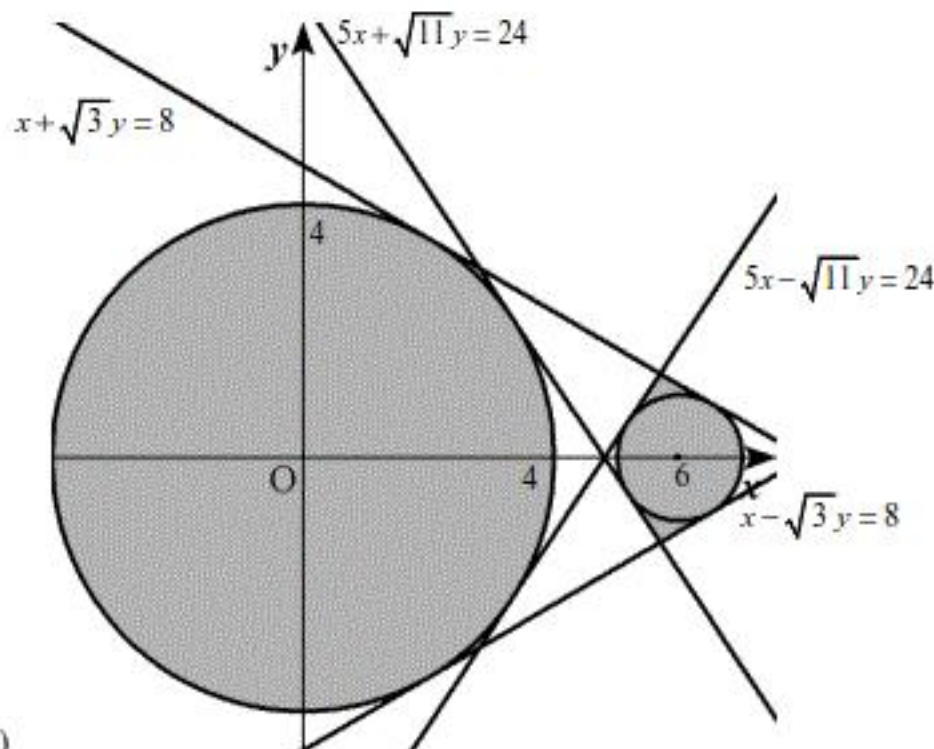
この条件を満たす領域は下図のようになる。(境界は、 C_1, C_2 上を除いて含む)



逆に、この領域の点を通る任意の直線は、確かに

C_1 または C_2 の少なくとも一方と共有点を持つので十分である。

以上より、求める領域は下図のようになる。(境界は含む)



(答)

[3]

(1)

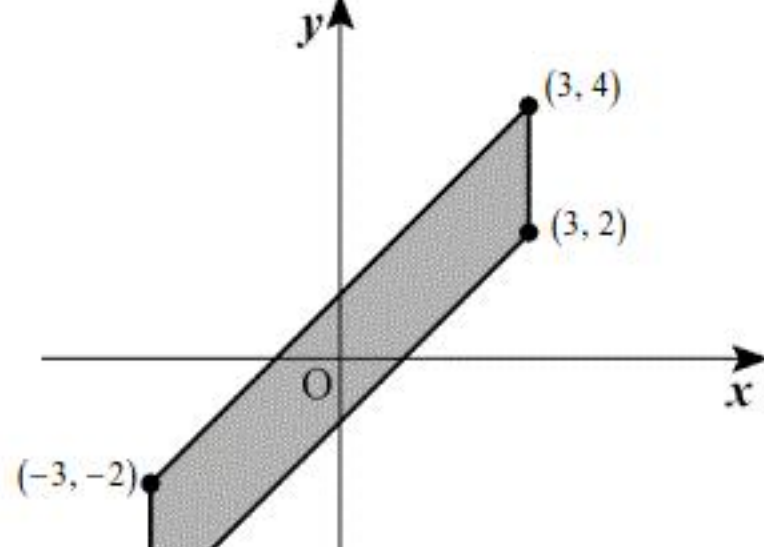
$$\begin{aligned} |x-y| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq x-y \leq 1 \\ \Leftrightarrow x-1 &\leq y \leq x+1 \end{aligned}$$

である。また

$$|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

であるから、領域 D は次図のようになる。

ただし、境界はすべて含む。

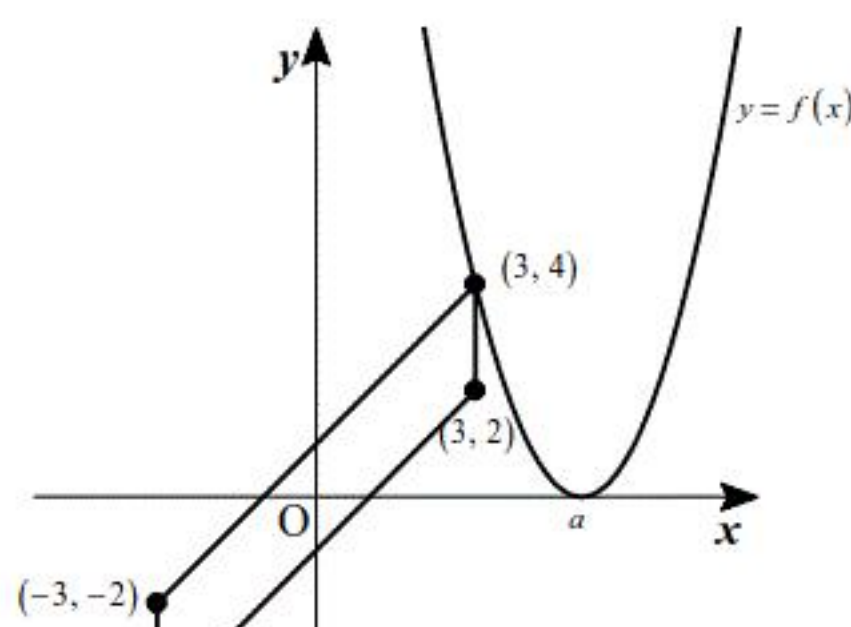


(答)

(2)

$f(x) = (x-a)^2$ とおくと、 $y = f(x)$ のグラフは下に凸な放物線であるから、

a が最大となるときの、グラフは次図のようになる。



このとき、 $y = f(x)$ のグラフは点 $(3, 4)$ を通るので、

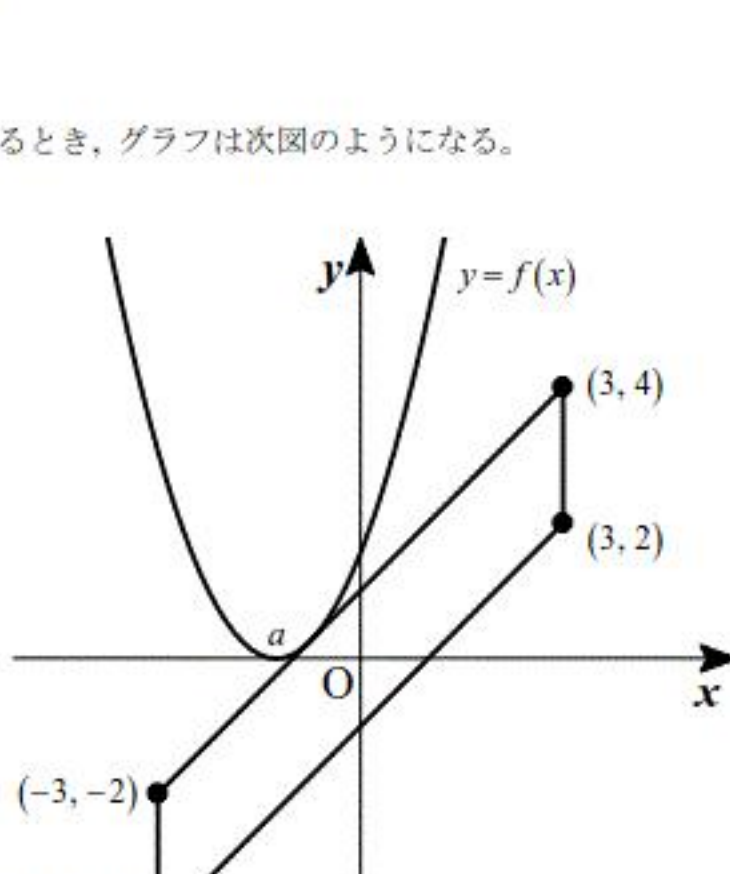
$$\begin{aligned} f(3) &= 4 \\ \Leftrightarrow (3-a)^2 &= 4 \\ \therefore a &= 1, 5 \end{aligned}$$

となるが、グラフより $a > 3$ なので、

$$a = 5$$

となる。

また、 a が最小となるときの、グラフは次図のようになる。



このとき、 $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = x+1$ と接するので、

方程式 $(x-a)^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - (2a+1)x + a^2 - 1 = 0$ の判別式を D_1 とすると、

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4(a^2-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a+5 &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

また、 $-\frac{5}{4} < a < 5$ のとき、放物線 $y = f(x)$ が領域 D と共通点をもつことは明らかである。

したがって、求める a の範囲は

$$-\frac{5}{4} \leq a \leq 5$$

となる。

$$(答) \quad -\frac{5}{4} \leq a \leq 5$$

(3)

放物線 $y = (x-a)^2$ と直線 $y = x-1$ が接するとき、

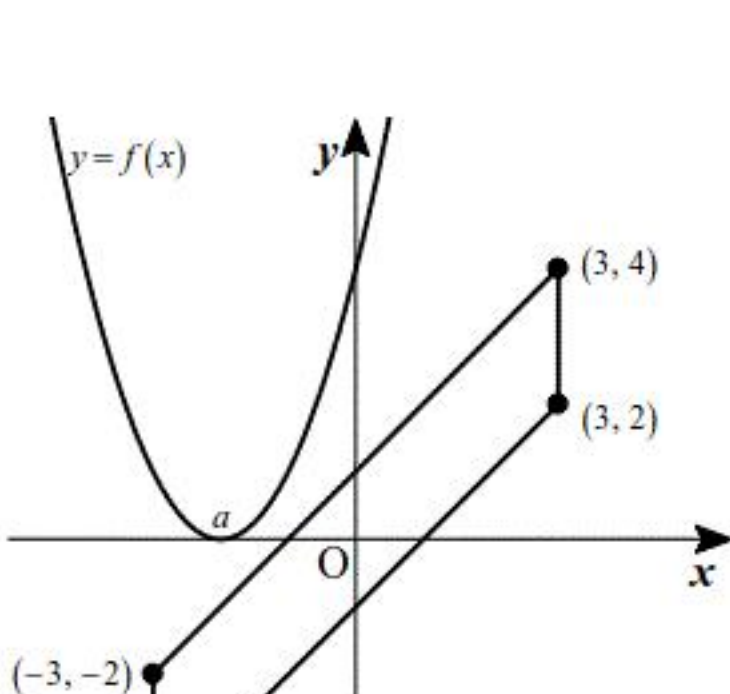
方程式 $(x-a)^2 = x-1 \Leftrightarrow x^2 - (2a+1)x + a^2 + 1 = 0$ の判別式を D_2 とすると、

$$\begin{aligned} D_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4(a^2+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a-3 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。

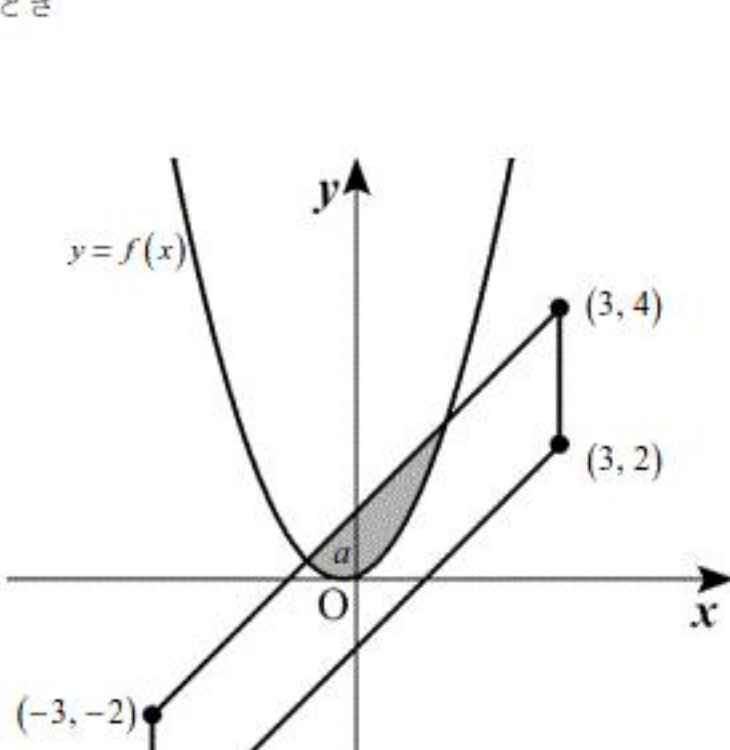
また、 $a = 1$ のときに $y = (x-a)^2$ が $(3, 4)$ を通ることに注意する。

$$[1] \quad a < -\frac{5}{4} \text{ のとき}$$



グラフは上図のようになり、領域 E は存在しないので、求める面積は 0 である。

$$[2] \quad -\frac{5}{4} \leq a < \frac{3}{4} \text{ のとき}$$



領域 E は、グラフの塗りつぶした部分である。

方程式 $(x-a)^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - (2a+1)x + a^2 - 1 = 0$ の 2 解を α_1, β_1 ($\alpha_1 \leq \beta_1$) とすると、

解と係数の関係より、

$$\alpha_1 + \beta_1 = 2a+1$$

$$\alpha_1 \beta_1 = a^2 - 1$$

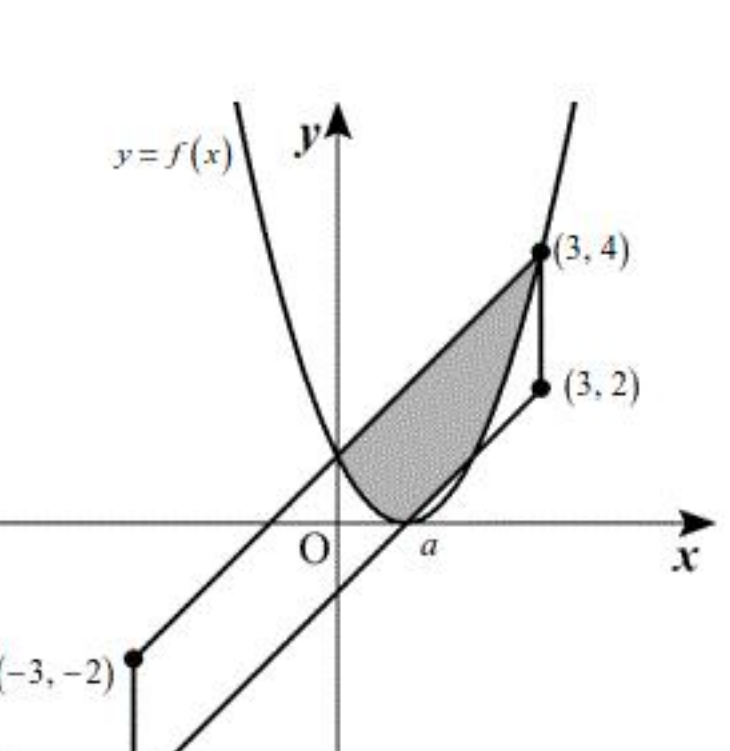
である。

$y = (x-a)^2$ と $y = x+1$ の交点の x 座標が α_1, β_1 なので、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \{x+1 - (x-a)^2\} dx \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \{-(x-\alpha_1)(x-\beta_1)\} dx \\ &= \frac{1}{6} (\beta_1 - \alpha_1)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \sqrt{(\beta_1 + \alpha_1)^2 - 4\alpha_1 \beta_1} \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \sqrt{4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 4} \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} (4a+5)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$[3] \quad \frac{3}{4} \leq a \leq 1 \text{ のとき}$$



領域 E は、グラフの塗りつぶした部分である。

方程式 $(x-a)^2 = x-1 \Leftrightarrow x^2 - (2a+1)x + a^2 + 1 = 0$ の 2 解を α_2, β_2 ($\alpha_2 \leq \beta_2$) とすると、

解と係数の関係より、

$$\alpha_2 + \beta_2 = 2a+1$$

$$\alpha_2 \beta_2 = a^2 + 1$$

である。

$y = (x-a)^2$ と $y = x-1$ の交点の x 座標が α_2, β_2 なので、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} (4a+5)^{\frac{3}{2}} - \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \{x-1 - (x-a)^2\} dx \\ &= \frac{1}{6} (4a+5)^{\frac{3}{2}} - \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \{-(x-\alpha_2)(x-\beta_2)\} dx \\ &= \frac{1}{6} (4a+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} (\beta_2 - \alpha_2)^3 \\ &= \frac{1}{6} (4a+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \left\{ \sqrt{(\beta_2 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_2 \beta_2} \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} (4a+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \left\{ \sqrt{4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4} \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ (4a+5)^{\frac{3}{2}} - (4a-3)^{\frac{3}{2}} \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \begin{cases} a < -\frac{5}{4} \text{ のとき} & 0 \\ -\frac{5}{4} \leq a < \frac{3}{4} \text{ のとき} & \frac{1}{6} (4a+5)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{3}{4} \leq a \leq 1 \text{ のとき} & \frac{1}{6} \left\{ (4a+5)^{\frac{3}{2}} - (4a-3)^{\frac{3}{2}} \right\} \end{cases}$$