

(1)

$A=B=0$ となるためには,

100 円硬貨は表が 2 回, 裏が 3 回出て, 500 円硬貨は表が 3 回, 裏が 2 回出ればよい。

それぞれの硬貨の表が出る確率と裏が出る確率は等しいので, 求める確率は,

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{256}$$

となる。

(答) $\frac{25}{256}$

(2)

硬貨をそれぞれ 5 回投げたときの A, B の値として考えられるものは

$$A = -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$B = -6, -4, -2, 0, 2, 4$$

である。よって, 5 回投げたときに $A=B$ になる場合, $A(B)$ の値として考えられるものは

$$A=B=-4, -2, 0, 2, 4$$

である。以下, それぞれの場合の確率を求める。

[1] $A=B=2$ のとき

100 円硬貨は表が 3 回, 裏が 2 回出て, 500 円硬貨は表が 4 回, 裏が 1 回出ればよい。

したがって, 確率は,

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{32} = \frac{25}{512}$$

となる。

[2] $A=B=4$ のとき

100 円硬貨は表が 4 回, 裏が 1 回出て, 500 円硬貨は表が 5 回出ればよい。

したがって, 確率は,

$${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot {}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{1024}$$

となる。

さらに, $A=B=-2$ になる確率と $A=B=2$ になる確率は等しく,

$A=B=-4$ になる確率と $A=B=4$ になる確率が等しいので, (1) の答も用いると,

求める確率は

$$\frac{25}{256} + 2 \cdot \frac{25}{512} + 2 \cdot \frac{5}{1024} = \frac{50+50+5}{512} = \frac{105}{512}$$

となる。

(答) $\frac{105}{512}$

(1)

C_1 上の点 (a, b) を接点とする接線の方程式は

$$ax + by = 16$$

であり、点 (a, b) は C_1 上の点であるから、

$$a^2 + b^2 = 16 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

C_1 の接線のうち、 C_2 に接するもの、つまり C_2 の中心 $(6, 0)$ との距離が1となるものを求めればよい。点と直線の距離の公式を用いると、

$$\frac{|6a - 16|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |6a - 16| = 4$$

$$\Leftrightarrow 6a - 16 = \pm 4$$

$$\therefore a = \frac{10}{3}, 2$$

①より、 $a = \frac{10}{3}$ のとき

$$b^2 = 16 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{44}{9}$$

$$\therefore b = \pm \frac{2\sqrt{11}}{3}$$

であり、 $a = 2$ のとき

$$b^2 = 16 - 2^2 = 12$$

$$\therefore b = \pm 2\sqrt{3}$$

である。

よって、 C_1 と C_2 の両方に接する接線の方程式は、

$$\frac{10}{3}x + \frac{2\sqrt{11}}{3}y = 16, \frac{10}{3}x - \frac{2\sqrt{11}}{3}y = 16, 2x + 2\sqrt{3}y = 16, 2x - 2\sqrt{3}y = 16$$

$$\therefore 5x + \sqrt{11}y = 24, 5x - \sqrt{11}y = 24, x + \sqrt{3}y = 8, x - \sqrt{3}y = 8$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 5x + \sqrt{11}y = 24, 5x - \sqrt{11}y = 24, x + \sqrt{3}y = 8, x - \sqrt{3}y = 8$$

(2)

円 C_1 または円 C_2 の内部(境界含む)に存在する点を通る任意の直線は、その点が含まれる方の円と明らかに共有点を持つ。よって、円 C_1 または円 C_2 の内部(境界含む)は、求める領域に含まれる。以下では、円 C_1 と円 C_2 の外部の点について考える。

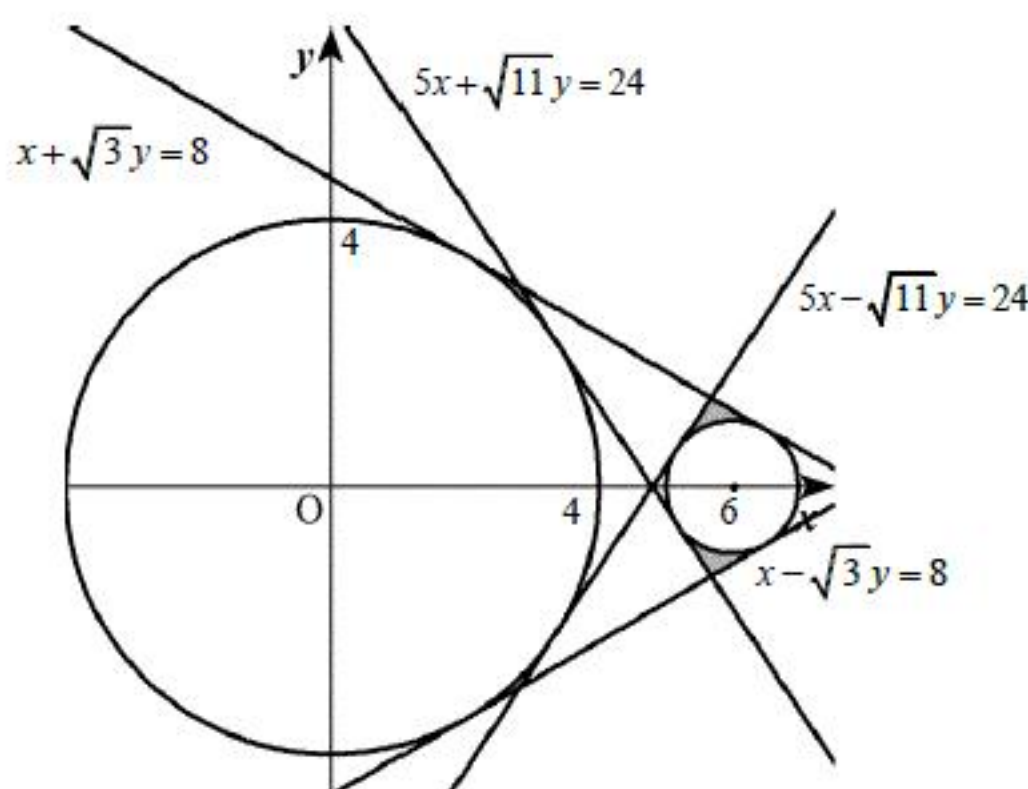
ある点 Q が、求める領域に含まれるための必要十分条件は、

Q から C_1 に引いた2本の接線が、2本とも C_2 と共有点を持ち、

なおかつ、 Q から C_2 に引いた2本の接線が、2本とも C_1 と共有点を持つ

ことである。なぜなら、もしこれが成り立たなければ、その接線の傾きを無限小変化させることで、 C_1 と C_2 のどちらとも共有点を持たずに Q を通る直線が作れるからである。

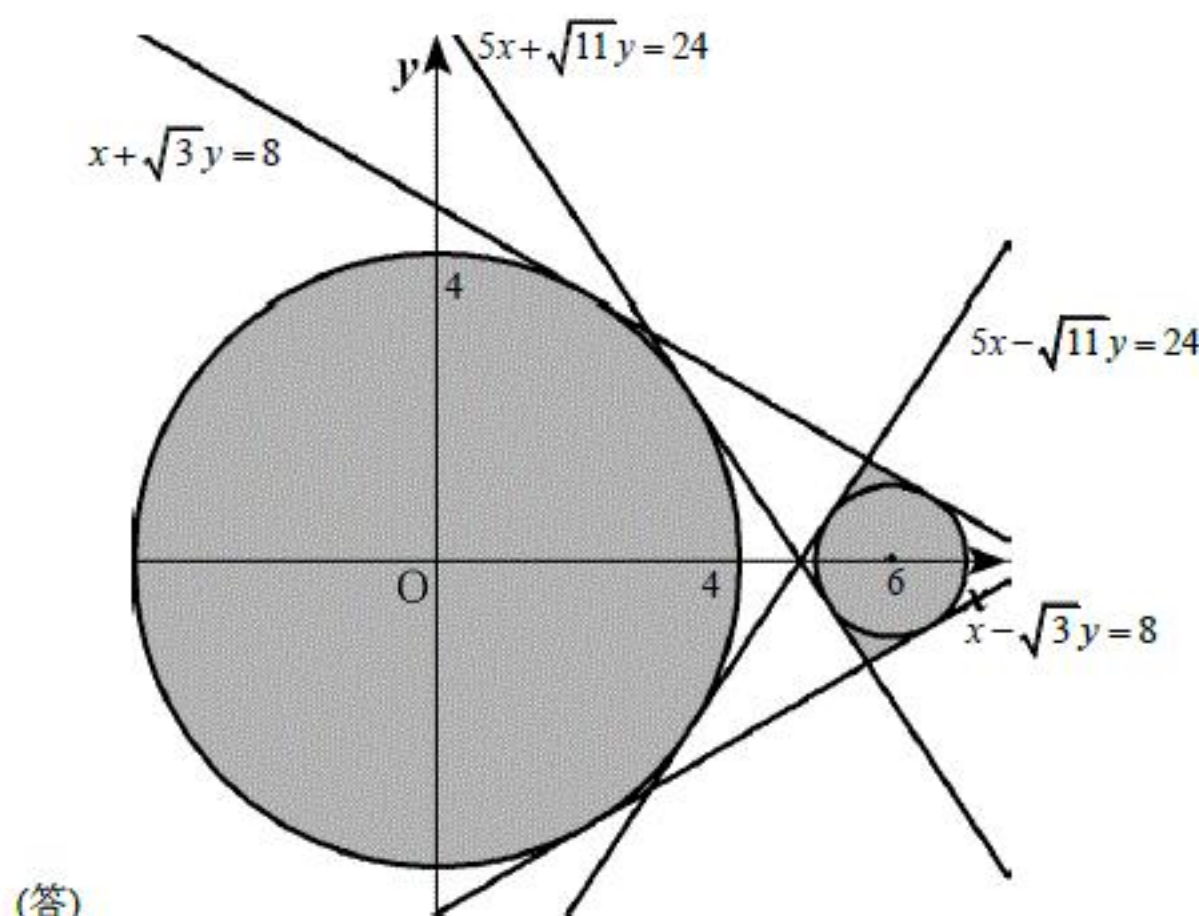
この条件を満たす領域は下図のようになる。(境界は、 C_1, C_2 上を除いて含む)



逆に、この領域の点を通る任意の直線は、確かに

C_1 または C_2 の少なくとも一方と共有点を持つので十分である。

以上より、求める領域は下図のようになる。(境界は含む)



(答)

3

(1)

$$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, g(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \text{ であるから,}$$

$$f'(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \cdot \log a, g'(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} \cdot \log a$$

$$f''(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} \cdot (\log a)^2, g''(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \cdot (\log a)^2$$

である。

$a > 1$ より, $\log a > 0$ であることを考慮すると,

関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ の増減表は, それぞれ次のようになる。

x	...	0	...
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

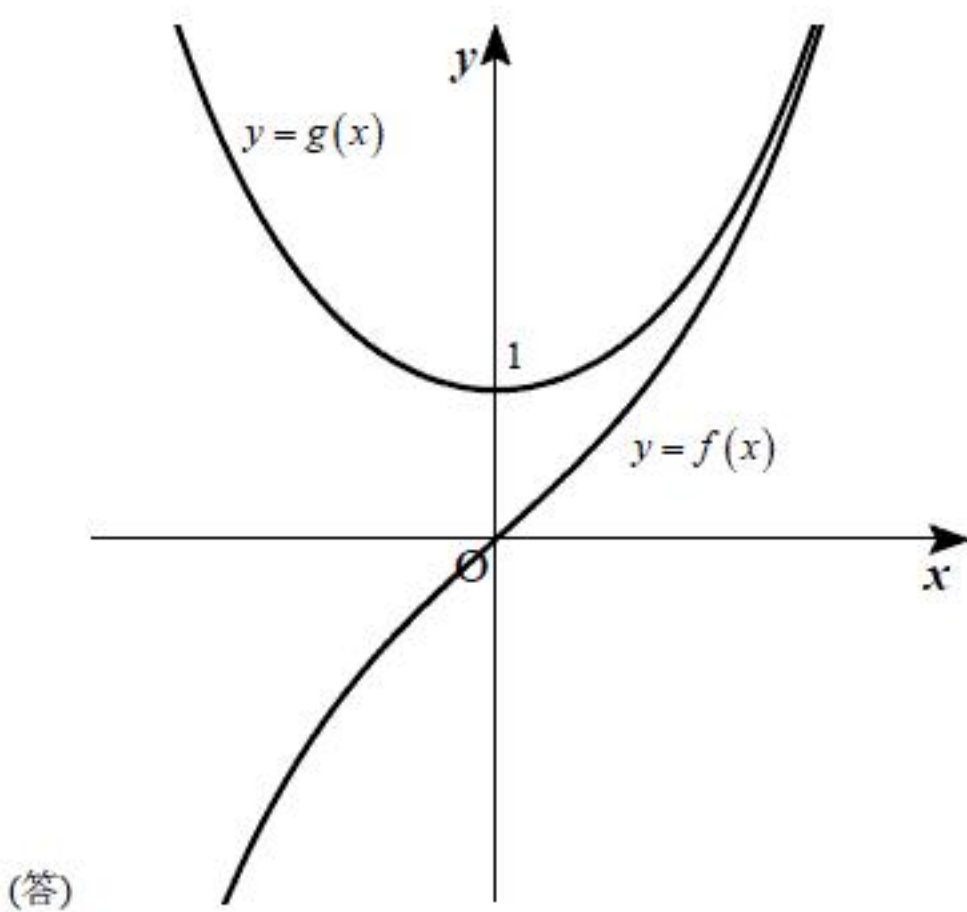
x	...	0	...
$g'(x)$	-	0	+
$g''(x)$	+	+	+
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

また,

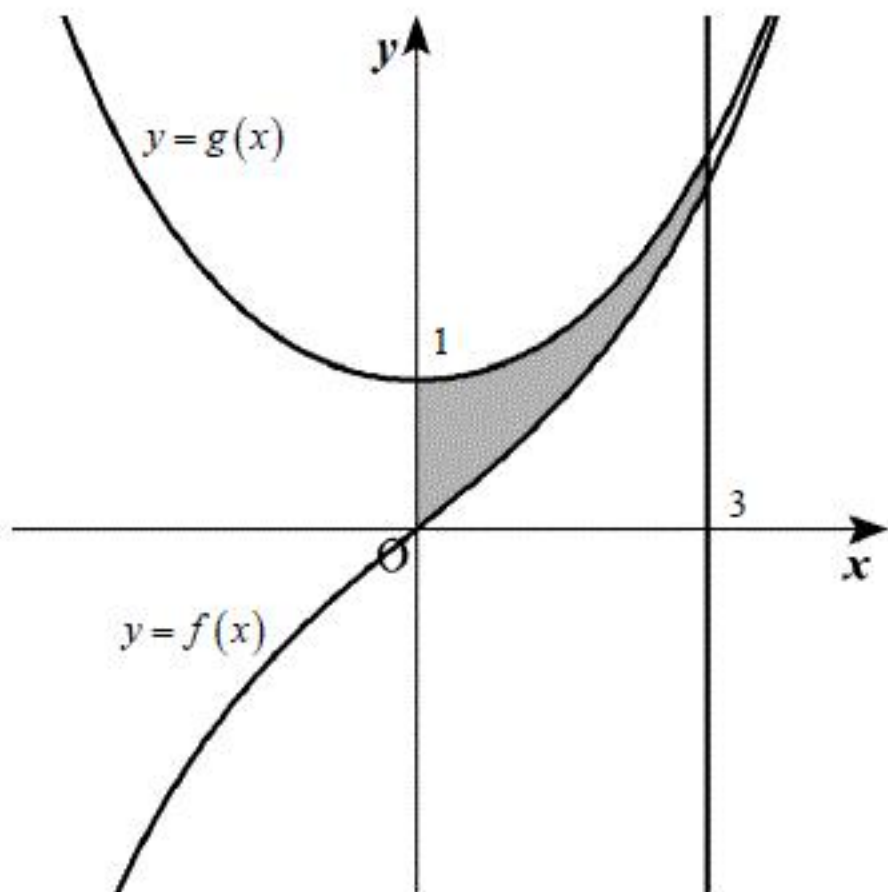
$$g(x) - f(x) = a^{-x} > 0$$

$$\therefore g(x) > f(x)$$

であるから, 増減表と合わせて, グラフは次図のようになる。



(2)



グラフより, 求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2} - \frac{a^x - a^{-x}}{2} \right) dx &= \int_0^3 a^{-x} dx \\ &= \left[\frac{-a^{-x}}{\log a} \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{\log a} (1 - a^{-3}) \\ &= \frac{a^3 - 1}{a^3 \log a} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a^3 - 1}{a^3 \log a}$

(3)

$$S(a) = \frac{a^3 - 1}{a^3 \log a}$$

より,

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{3a^2 \cdot a^3 \log a - (a^3 - 1)(3a^2 \log a + a^2)}{a^6 (\log a)^2} \\ &= \frac{3 \log a - a^3 + 1}{a^4 (\log a)^2} \end{aligned}$$

である。ここで,

$$h(a) = 3 \log a - a^3 + 1$$

とおくと,

$$h(2) = 3 \log 2 - 8 + 1 = 3 \log 2 - 7 < 0 \quad (\because \log 2 < 1)$$

である。

また, $2 \leq a \leq 5$ のとき,

$$h'(a) = \frac{3}{a} - 3a^2 = \frac{3}{a} (1 - a^3) < 0$$

であり, $h(a)$ は単調減少するので, $h(a) \leq h(2) < 0$ となる。

よって,

$$S'(a) = \frac{h(a)}{a^4 (\log a)^2} < 0$$

となるから, $S(a)$ は $2 \leq a \leq 5$ で単調減少する。

したがって,

$$S(a) \text{ は, } a = 2 \text{ のとき最大値 } \frac{7}{8 \log 2} \text{ をとり, } a = 5 \text{ のとき最小値 } \frac{124}{125 \log 5} \text{ をとる。}$$

(答) 最大値 $\frac{7}{8 \log 2}$ 最小値 $\frac{124}{125 \log 5}$