

(1)

m を整数とすると, $m \leq x < m+1$ のとき,

$$f(x) = x - [x] = x - m$$

であるから,

$$-3 \leq x < -2 \text{ のとき } f(x) = x + 3$$

$$-2 \leq x < -1 \text{ のとき } f(x) = x + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \text{ のとき } f(x) = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき } f(x) = x$$

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき } f(x) = x - 1$$

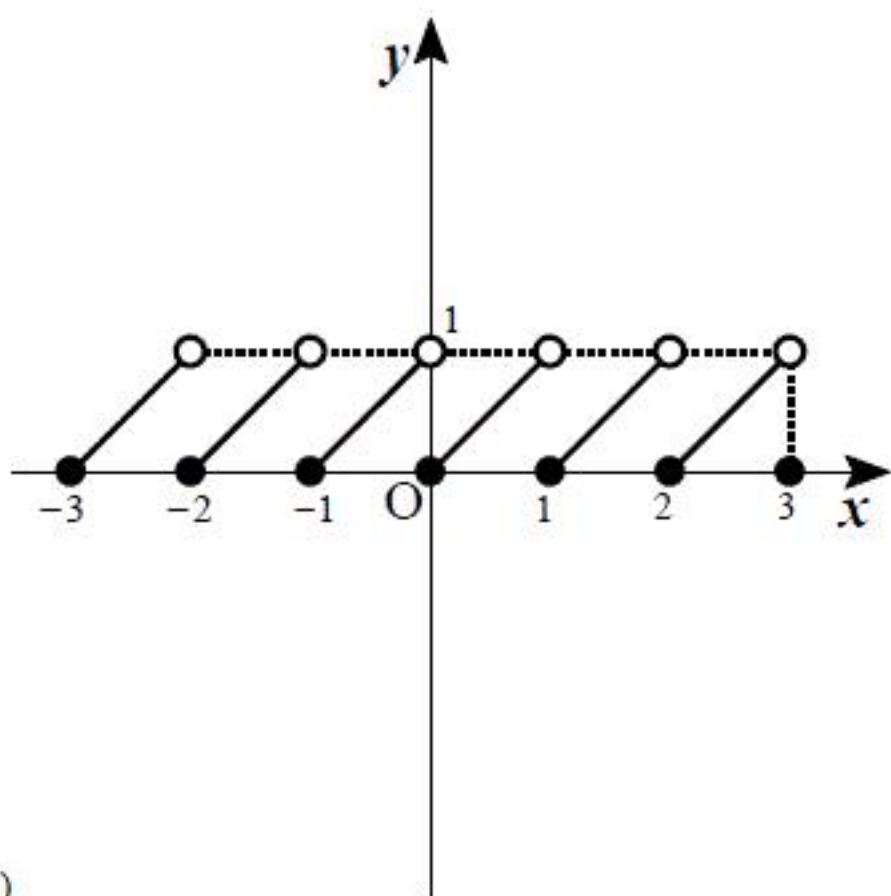
$$-2 \leq x < 3 \text{ のとき } f(x) = x - 2$$

である。

また, $f(3) = 3 - [3] = 0$ である。

したがって, $y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。

ただし, 黒丸は含み, 白丸は含まない。



(答)

(2)

m を整数とすると,

$$\begin{aligned} \int_m^{m+1} g(x) dx &= \int_m^{m+1} (x-m) e^{-x} dx \\ &= \left[-(x-m) e^{-x} \right]_m^{m+1} + \int_m^{m+1} e^{-x} dx \\ &= -e^{-m-1} - \left[e^{-x} \right]_m^{m+1} \\ &= -2e^{-m-1} + e^{-m} \\ &= e^{-m-1} (e-2) \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n g(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n-1} \int_m^{m+1} g(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n-1} \{ e^{-m-1} (e-2) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e-2) e^{-2} \cdot \frac{1-e^{-(n-1)}}{1-e^{-1}} \\ &= (e-2) e^{-2} \cdot \frac{1}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{e-2}{e(e-1)} \end{aligned}$$

となる。

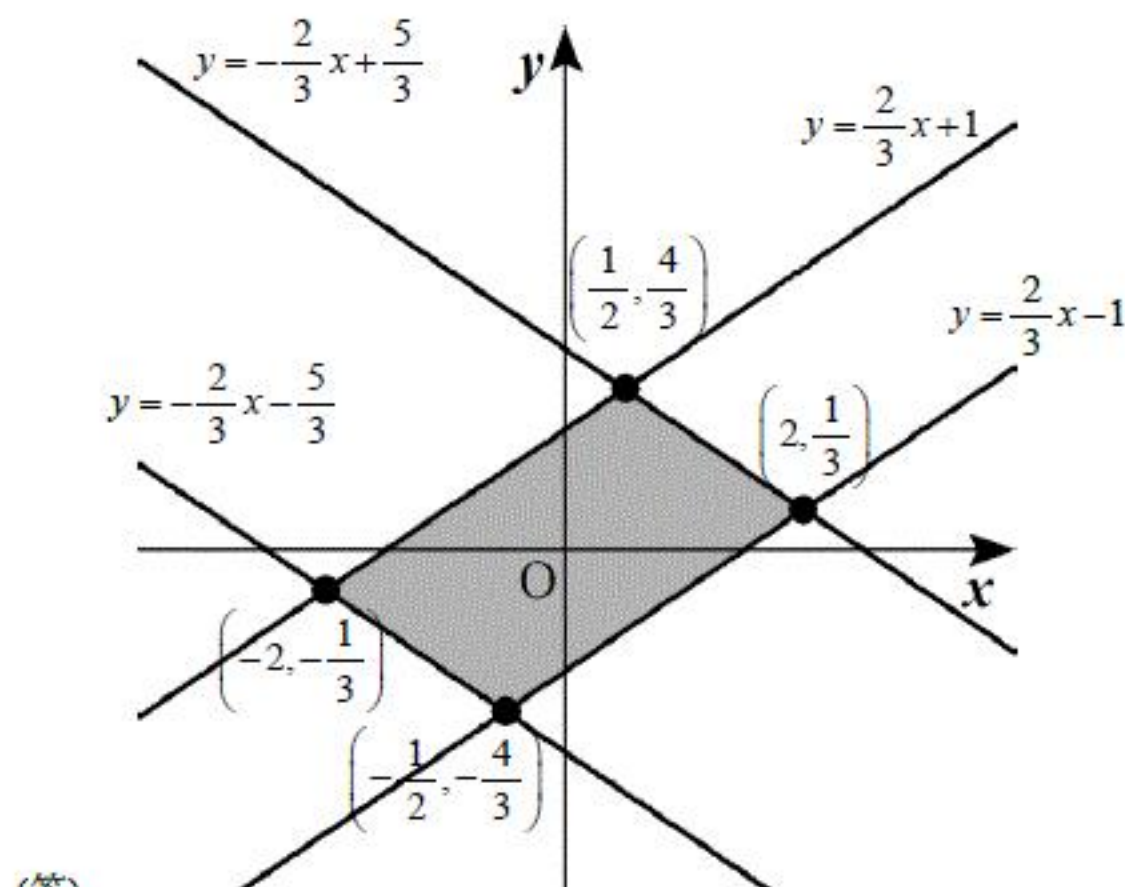
(答) $\frac{e-2}{e(e-1)}$

2

(1)

$$\begin{aligned} &|2x+3y| \leq 5 \\ &\Leftrightarrow -5 \leq 2x+3y \leq 5 \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \leq y \leq -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ &|3y-2x| \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq 3y-2x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 1 \leq y \leq \frac{2}{3}x + 1 \end{aligned}$$

であるから、求める領域は次図の塗りつぶした部分である。ただし、境界はすべて含む。



(2)

求める平行四辺形の面積は、 $\triangle OAB$ の面積の 2 倍である。

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とおくと

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$

であり、 $\sin \theta \geq 0$ であることから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \right)^2} = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$

である。

ここで、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 &= a^2 + b^2 \\ |\overrightarrow{OB}|^2 &= c^2 + d^2 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= ac + bd \end{aligned}$$

であるから、求める平行四辺形の面積は、

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin \theta &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cdot \frac{\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\ &= \sqrt{a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd} \\ &= \sqrt{(ad - bc)^2} \\ &= |ad - bc| \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} as + bu & at + bv \\ cs + du & ct + dv \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = as + bu \\ l = at + bv \\ m = cs + du \\ n = ct + dv \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} kn - lm &= (as + bu)(ct + dv) - (at + bv)(cs + du) \\ &= adsv + bctu - adtu - bcsv \\ &= (ad - bc)(sv - tu) \end{aligned}$$

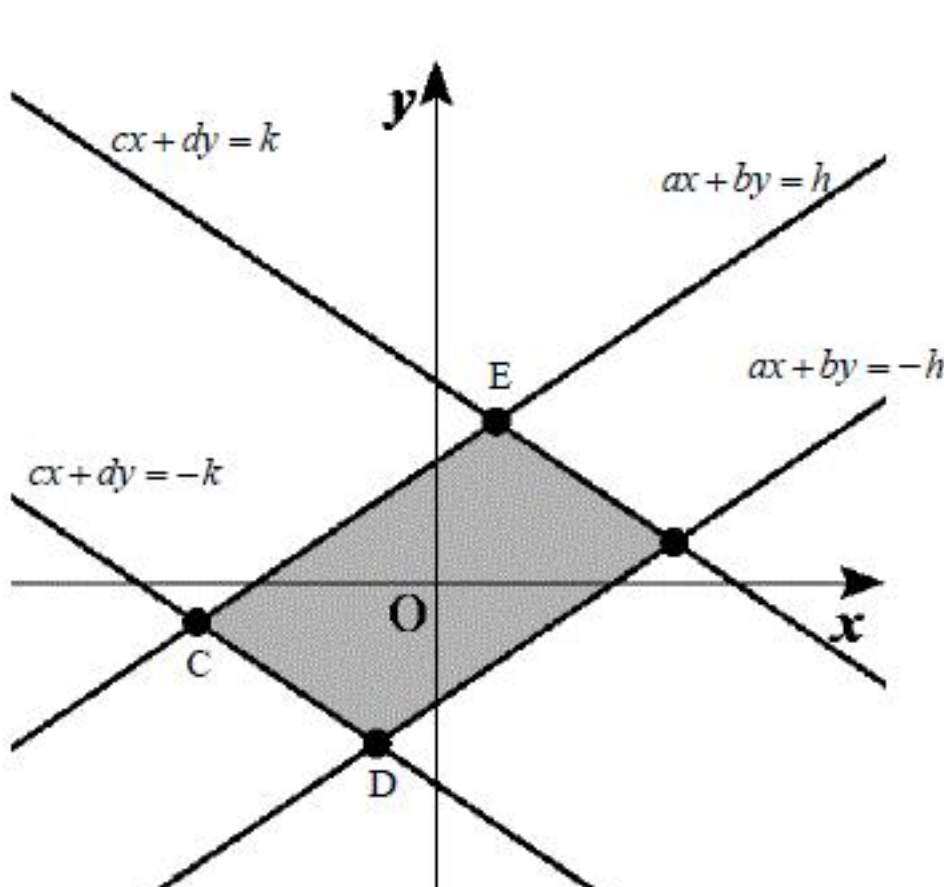
となる。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} |ax + by| \leq h &\Leftrightarrow -h \leq ax + by \leq h \\ |cx + dy| \leq k &\Leftrightarrow -k \leq cx + dy \leq k \end{aligned}$$

であるから、 $|ax + by| \leq h, |cx + dy| \leq k$ で表される領域は、次図の塗りつぶした部分である。



上図のように、点 $C(x_C, y_C), D(x_D, y_D), E(x_E, y_E)$ を定める。

求める領域の面積を S とすると、この領域は平行四辺形であるので、(2)の結果より

$$S = |(x_D - x_C)(y_E - y_C) - (x_E - x_C)(y_D - y_C)|$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax_C + by_C = h \\ cx_C + dy_C = -k \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h \\ -k \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、同様に、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ -k \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

②-①より、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{4}$$

③-①より、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{5}$$

であるから、④、⑤より、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_D - x_C & x_E - x_C \\ y_D - y_C & y_E - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

ここで、(3)の結果を使うと、 $ad - bc \neq 0, hk = |ad - bc|$ より、

$$\begin{aligned} (ad - bc)\{(x_D - x_C)(y_E - y_C) - (x_E - x_C)(y_D - y_C)\} &= -4kh \\ \Leftrightarrow (x_D - x_C)(y_E - y_C) - (x_E - x_C)(y_D - y_C) &= \frac{-4|ad - bc|}{ad - bc} \end{aligned}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} S &= |(x_D - x_C)(y_E - y_C) - (x_E - x_C)(y_D - y_C)| \\ &= \left| \frac{-4|ad - bc|}{ad - bc} \right| \\ &= 4 \end{aligned}$$

よって、面積は a, b, c, d, h, k によらず一定であり、その値は 4 である。

(答) 4

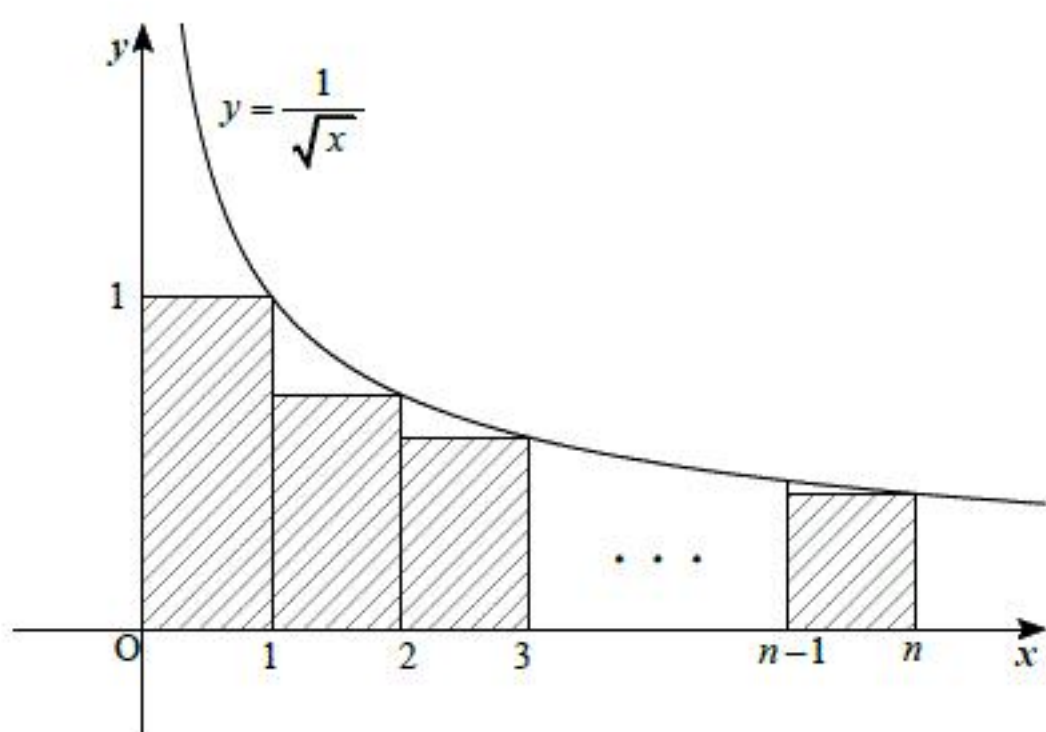


図 1

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ は図 1 の斜線部の面積に等しいので,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} &\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 1 + \left[2\sqrt{x} \right]_1^n \\ &= 2\sqrt{n} - 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

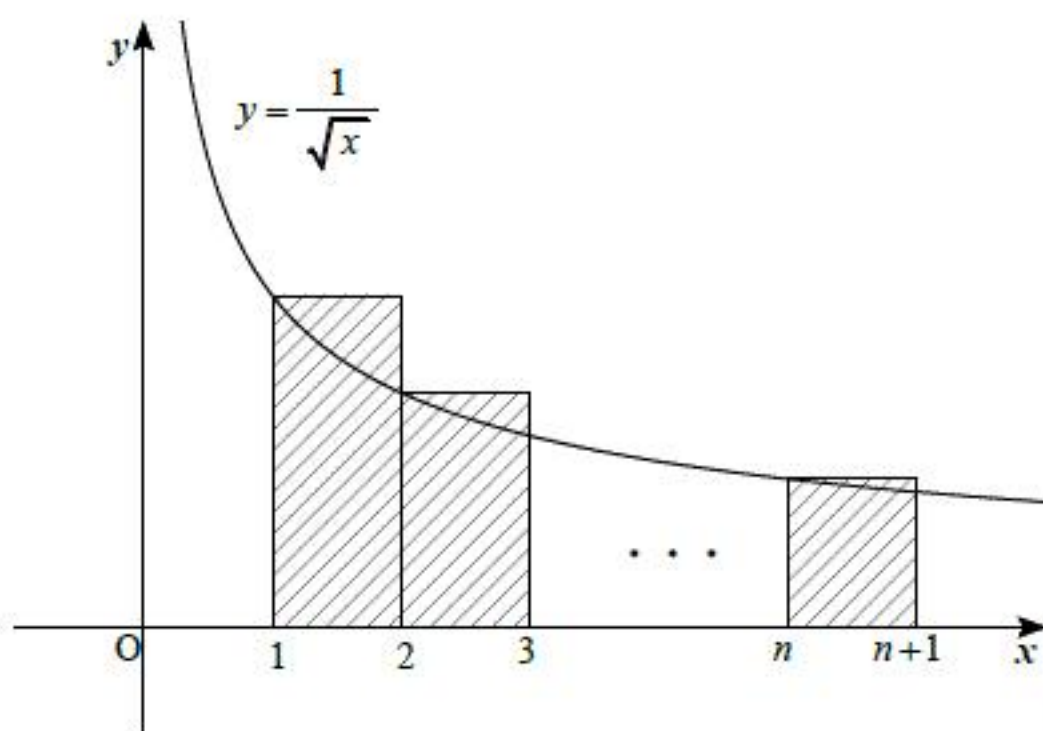


図 2

また, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ は図 2 の斜線部の面積にも等しいので,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} &> \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \left[2\sqrt{x} \right]_1^{n+1} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

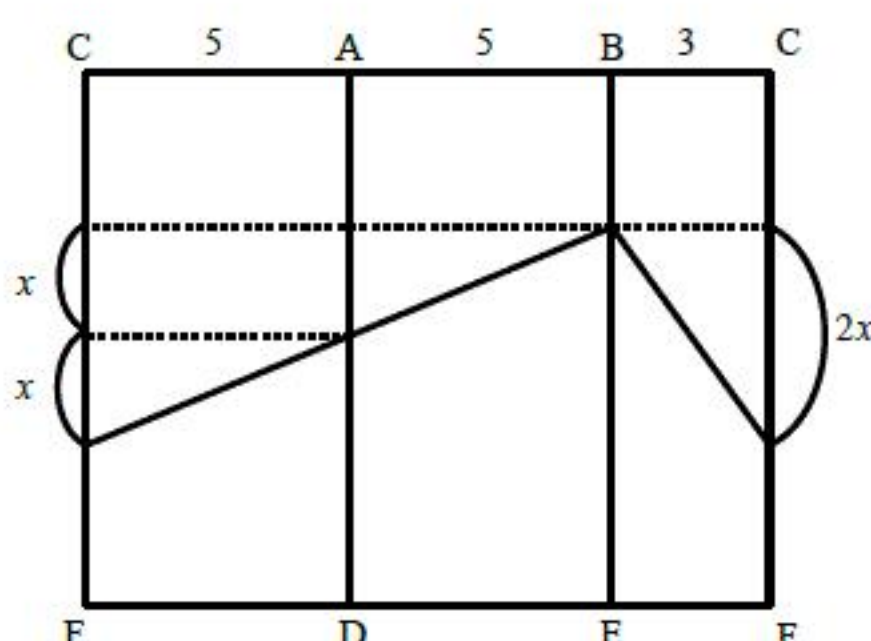
以上より, 自然数 n に対して

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

が成り立つことが示された。

(1)

平面 H と三角柱との交わりが正三角形になるとき、平面 H と三角柱の側面との交線を三角柱の側面の展開図に描くと、次図のようになる。



図のように x ($0 < x < 5$) を定めると、正三角形の各辺の長さが等しいことから、

$$\begin{aligned} 5^2 + x^2 &= 3^2 + (2x)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{16}{3} \\ \therefore x &= \frac{4}{\sqrt{3}} \quad (\because 0 < x < 5) \end{aligned}$$

となる。

したがって、正三角形の1辺の長さは、

$$\sqrt{5^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{91}{3}}$$

であるから、その面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{91}{3}} \cdot \sqrt{\frac{91}{3}} \cdot \sin 60^\circ = \frac{91}{12} \sqrt{3}$$

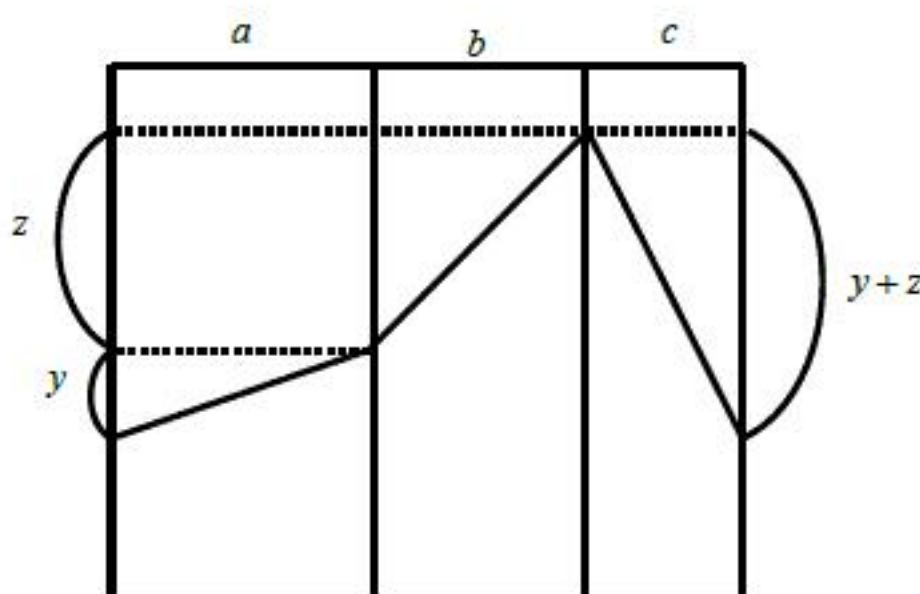
となる。

(答) $\frac{91}{12} \sqrt{3}$

(2)

底面の三角形の1辺の長さをそれぞれ a, b, c ($a \geq b \geq c$) とおいても一般性を失わない。

平面 H と三角柱との交わりが正三角形になるとき、平面 H と三角柱の側面との交線を三角柱の側面の展開図に描くと、次図のようになる。



正三角形の各辺の長さが等しいことから、

$$\begin{aligned} a^2 + y^2 &= b^2 + z^2 = c^2 + (y+z)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + y^2 = b^2 + z^2 & \dots \textcircled{1} \\ b^2 + z^2 = c^2 + (y+z)^2 & \dots \textcircled{2} \end{cases} \end{aligned}$$

である。任意の a, b, c ($a \geq b \geq c$) に対して、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を満たす y, z ($y \geq 0, z \geq 0$) が存在することを示せばよい。

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow y(y+2z) = b^2 - c^2 \quad \dots \textcircled{2}'$$

[1] $b=c$ のとき

$y+2z > 0$ であることから $\textcircled{2}'$ より $y=0$ であり、このとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow z = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\because a \geq b)$$

となるので、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を満たす y, z ($y \geq 0, z \geq 0$) が存在する。

[2] $b > c$ のとき

$\textcircled{2}'$ より $y \neq 0$ なので、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow z = \frac{b^2 - c^2}{2y} - \frac{y}{2}$$

となる。これを、 $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} a^2 + y^2 &= b^2 + \left(\frac{b^2 - c^2}{2y} - \frac{y}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - b^2 &= \frac{(b^2 - c^2)^2}{4y^2} - \frac{b^2 - c^2}{2} - \frac{3y^2}{4} \\ \Leftrightarrow 3y^4 + 2(2a^2 - b^2 - c^2)y^2 - (b^2 - c^2)^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $Y = y^2$ (> 0) とおくと、

$$3Y^2 + 2(2a^2 - b^2 - c^2)Y - (b^2 - c^2)^2 = 0$$

となる。

$$f(Y) = 3Y^2 + 2(2a^2 - b^2 - c^2)Y - (b^2 - c^2)^2$$

とおくと、

$$f(0) = -(b^2 - c^2)^2 < 0 \quad (\because b > c)$$

であるので、 $f(Y)$ のグラフが下に凸な放物線を表すことに注意すると、

$f(Y) = 0$ は $Y > 0$ の範囲に1つ解をもつ。

よって、 $\textcircled{3}$ を満たす $y(> 0)$ が存在する。また、このとき、 $a \geq b$ より、

$$z^2 = a^2 - b^2 + y^2 \geq y^2 > 0$$

であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を満たす $y, z(> 0)$ が存在することが示された。

以上より、底面がどんな三角形であっても、

平面 H と三角柱の交わりが正三角形になりうることを証明された。

(証明終)