

1

(1)

曲線 $y = 2x - 2^x$ について、 $y' = 2 - 2^x \log 2 = 0$ を解くと

$$2^x = \frac{2}{\log 2}$$

$$\therefore x = \log_2 \left(\frac{2}{\log 2} \right) = 1 - \log_2 (\log 2)$$

であるから、 y の増減表は次のようになる。

x	...	$1 - \log_2 (\log 2)$	...
y'	+	0	-
y	$\nearrow$	$2 - 2 \log_2 (\log 2) - \frac{2}{\log 2}$	$\searrow$

ここで、

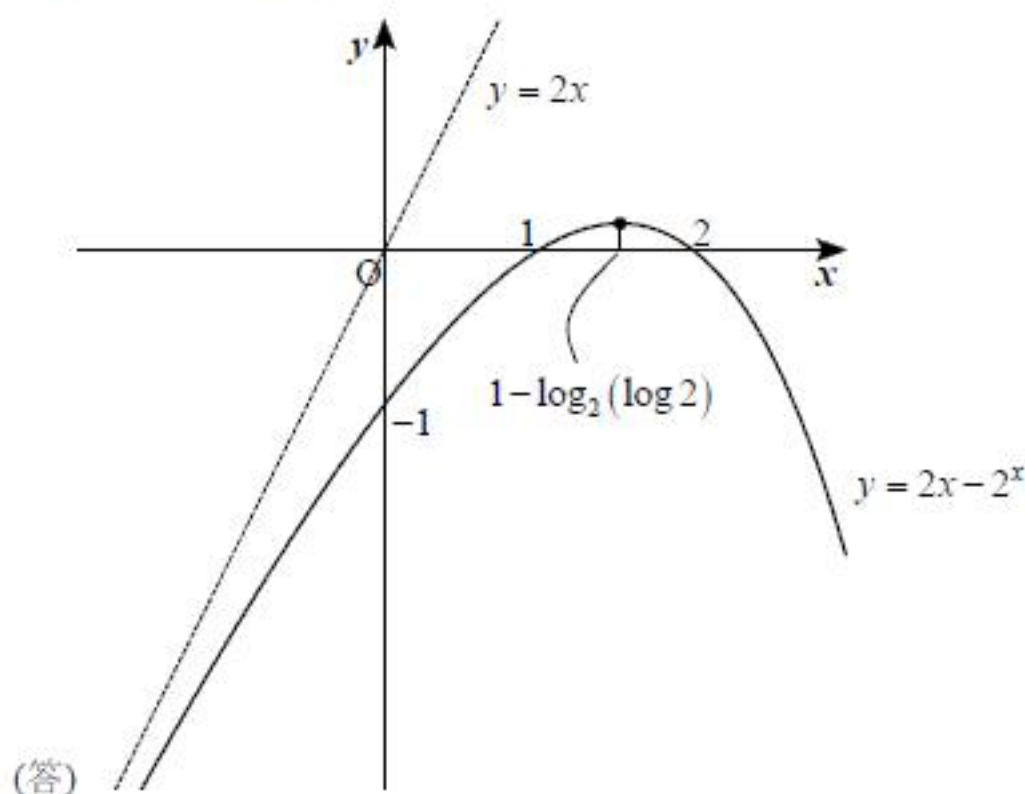
$$2x - 2^x = 0 \Leftrightarrow x = 1, 2$$

なので、曲線 $y = 2x - 2^x$ は x 軸と $x = 1, 2$ で交わる。また、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2^x) = 0$$

であるから、 $x \rightarrow -\infty$ において $y = 2x$ に漸近する。

以上より、曲線 $y = 2x - 2^x$ の概形は次図のようになる。



(2)

求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^2 \pi (2x - 2^x)^2 dx \\
 &= \pi \int_1^2 (4x^2 - 4x \cdot 2^x + 4^x) dx \\
 &= \pi \int_1^2 (4x^2 + 4^x) dx - 4\pi \int_1^2 x \cdot 2^x dx \\
 &= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 + \frac{4^x}{\log 4} \right]_1^2 - 4\pi \left\{ \left[x \cdot \frac{2^x}{\log 2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2^x}{\log 2} dx \right\} \\
 &= \pi \left\{ \frac{4}{3} (8 - 1) + \frac{16 - 4}{2 \log 2} \right\} - 4\pi \left\{ \left(\frac{8 - 2}{\log 2} \right) - \left[\frac{2^x}{(\log 2)^2} \right]_1^2 \right\} \\
 &= \pi \left\{ \frac{28}{3} - \frac{18}{\log 2} + 4 \cdot \frac{4 - 2}{(\log 2)^2} \right\} \\
 &= \pi \left\{ \frac{28}{3} - \frac{18}{\log 2} + \frac{8}{(\log 2)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \pi \left\{ \frac{28}{3} - \frac{18}{\log 2} + \frac{8}{(\log 2)^2} \right\}$$

(1)

$$16 = 2^4 a_1 \leq \cdots \leq 2a_4 \leq a_5 \leq 3a_4 \leq \cdots \leq 3^4 a_1 = 81$$

$$(\text{答}) \quad 16 \leq a_5 \leq 81$$

(2)

(1)と同様に考えると、

$$2 \leq a_2 \leq 3$$

$$4 \leq a_3 \leq 9$$

$$8 \leq a_4 \leq 27$$

$$16 \leq a_5 \leq 81$$

となるので、 $a_k = 9$ となり得るのは、 $k = 3, 4$ のときである。

[1] $k = 3$ のとき

$$9 = a_3 \leq 3a_2 \leq 9a_1 = 9$$

となるので、全ての不等号は等号に置き換わり、

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9$$

となる。

[2] $k = 4$ のとき

$$2a_3 \leq a_4 = 9 \leq 3a_3$$

$$\therefore 3 \leq a_3 \leq \frac{9}{2}$$

なので、 $a_3 = 3, 4$ であるが、 $a_3 = 3$ は $4 \leq a_3 \leq 9$ に反するため適さない。

一方、 $a_3 = 4$ のときは $a_1 = 1, a_2 = 2$ となる。

以上[1], [2]より

$$k = 3 \text{ のとき } a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9$$

$$k = 4 \text{ のとき } a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 9$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = 3 \text{ のとき } a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9$$

$$k = 4 \text{ のとき } a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 9$$

(3)

$$16 \leq a_5 \leq 81$$

$$32 \leq a_6 \leq 243$$

$$64 \leq a_7 \leq 729$$

$$128 \leq a_8 \leq 2187$$

であり、 a_n のとり得る値の範囲の最小値および最大値は n について単調増加するので、

$a_n = 100$ のとき、 $n = 6, 7$ である。

$$(\text{答}) \quad n = 6, 7$$