

1

(1)

$$C_1: y = -x^2 + 4x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$C_2: y = x^2 - 2x \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②の交点の x 座標は,

$$-x^2 + 4x = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0, 3$$

となるが, $x=0$ のとき原点に一致するので,

$$x=3$$

である。したがって,

$$A(3, 3)$$

となる。また, ②を変形すると,

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

となるので,

$$B(1, -1)$$

である。

(答) $A(3, 3), B(1, -1)$

(2)

点 A, B を通る直線 ℓ の方程式は,

$$y+1 = \frac{3-(-1)}{3-1}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \ell: y = 2x - 3$$

であるので, 実数 t を用いて,

$$H(t, 2t-3)$$

と表せる。すると, $\overline{AB}$ と $\overline{HP}$ は直交することから,

$$\overline{AB} \cdot \overline{HP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1, 2) \cdot (x_1 - t, y_1 - 2t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - t) + 2(y_1 - 2t + 3) = 0$$

$$\therefore t = \frac{x_1 + 2y_1 + 6}{5}$$

と求まる。以上より,

$$H\left(\frac{x_1 + 2y_1 + 6}{5}, \frac{2x_1 + 4y_1 - 3}{5}\right)$$

である。

(答) $H\left(\frac{x_1 + 2y_1 + 6}{5}, \frac{2x_1 + 4y_1 - 3}{5}\right)$

(3)

$$AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

であり, 点と直線の距離の公式から,

$$PH = \frac{|2x_1 - y_1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} |2x_1 - y_1 - 3|$$

となる。したがって, $\triangle ABP$ の面積を S とおくと, $y_1 = -x_1^2 + 4x_1$ とかけることに注意して,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} |2x_1 - y_1 - 3|$$

$$= |2x_1 - y_1 - 3|$$

$$= |x_1^2 - 2x_1 - 3|$$

と求まる。

(答) $|x_1^2 - 2x_1 - 3|$

(4)

$0 \leq x_1 \leq 3$ のとき,

$$x_1^2 - 2x_1 - 3 = (x_1 - 1)^2 - 4 \leq 0$$

であるから,

$$S = -(x_1 - 1)^2 + 4$$

となる。したがって, S は $x_1 = 1$ のとき最大値 4 をとる。このとき,

$$P(1, 3)$$

である。

(答) $\triangle ABP$ の面積の最大値: 4 , $P(1, 3)$

(1)

順に求めていくと、

$$a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 13, a_5 = 17, \\ a_6 = 19, a_7 = 23, a_8 = 29, a_9 = 31, a_{10} = 37$$

となる。

(答) $a_{10} = 37$

(2)

$$M = \{2 \text{ でも } 3 \text{ でも } 5 \text{ でも 割り切れない整数}\}$$

とおく。このとき、

$$a \in M \Leftrightarrow a + 30 \in M$$

であることがわかるから、数列 $\{a_n\}$ は(1)で求めた、1 から 30 までの間の M の元、 a_1 から a_8 のあとは、規則

$$a_{n+8} = a_n + 30$$

により、順次定まる数列であることがわかる。したがって、

$$500 = 8 \cdot 62 + 4$$

とかけることから、

$$a_{500} = a_4 + 62 \cdot 30 = 1873$$

と求まる。

(答) $a_{500} = 1873$

(3)

(2)で求めた周期性を考えれば、数列

$$b_n = a_{8(n-1)+1} + a_{8(n-1)+2} + a_{8(n-1)+3} + a_{8(n-1)+4} + a_{8(n-1)+5} + a_{8(n-1)+6} + a_{8(n-1)+7} + a_{8n}$$

は、初項が、

$$b_1 = 1 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 120$$

で、公差が、 $8 \cdot 30 = 240$ の等差数列であるから、

$$b_n = 120 + 240(n-1) = 240n - 120$$

と求まる。したがって求める和は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{8k} a_i &= \sum_{i=1}^k b_i \\ &= \sum_{i=1}^k (240i - 120) \\ &= 240 \cdot \frac{k(k+1)}{2} - 120k \\ &= 120k^2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $120k^2$

(1)

問題の3条件に注意して、部分積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^2 f'(x) dx &= \left[x^2 f(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x f(x) dx \\ &= f(1) - f(-1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f(x) dx \\ &= 0\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと、偶関数、奇関数に注意して、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x f(x) dx &= \int_{-1}^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{5} ax^5 + \frac{1}{3} cx^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5} a + \frac{2}{3} c\end{aligned}$$

と求まるから、条件より、

$$\frac{2}{5} a + \frac{2}{3} c = 0 \Leftrightarrow 3a + 5c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$f(1) = a + b + c + d = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(-1) = -a + b - c + d = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから、

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} \Leftrightarrow b + d = 0 \therefore d = -b \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \Leftrightarrow a + c = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{5}$ から、

$$a = c = 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

であるから、 $\textcircled{4}$ と $\textcircled{6}$ より、

$$f(x) = b(x^2 - 1)$$

であることが分かる。したがって、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) e^x dx &= b \int_{-1}^1 (x^2 e^x - e^x) dx\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) e^x dx &= b \left[(x^2 - 2x + 1) e^x \right]_{-1}^1 \\ &= b(0 \cdot e - 4e^{-1}) \\ &= -4be^{-1}\end{aligned}$$

と求まる。

$$\int_{-1}^1 f(x) e^x dx = 1$$

であるから、

$$-4be^{-1} = 1 \therefore b = -\frac{1}{4}e$$

となる。以上より、

$$f(x) = -\frac{1}{4}e(x^2 - 1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -\frac{1}{4}e(x^2 - 1)$$