

1

(1)

$k \times l$ 行列と $m \times n$ 行列の積が定義できるのは、 $l = m$ のときだけであることに注意すると、積が定義できるのは次の 4 通りに限ることがわかる。

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AD = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 3 = -2$$

$$BC = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (13 \ 17 \ 21)$$

$$(\text{答}) \ AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, AD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, BA = -2, BC = (13 \ 17 \ 21)$$

(2)

正方行列のときのみ、 n 乗を考えることができるので、

$$(AB)^n = A(BA)^{n-1}B = A \cdot (-2)^{n-1}B = (-2)^{n-1}AB = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^n = (-2)^n$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ (AB)^n = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, (BA)^n = (-2)^n$$

(3)

行列に右から順に別の行列を掛けていくことを考えると、(1)の結果から、 C や D には右から別の種類の行列を掛けられないことがわかる。また、 A から D のどの行列も、自分自身との積は考えられないから、 A から D までを掛け合わせて得られる行列は次のいずれかの形となる。以下、 k 次正方行列の 0 乗は k 次単位行列を表すものとする。

[1] $(AB)^n C$ ($n \geq 0$) のとき

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ -13 & -17 & -21 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^n C = A(BA)^{n-1}BC = (-2)^{n-1}ABC = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ -13 & -17 & -21 \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

となる。

[2] $B(AB)^n C$ ($n \geq 0$) のとき

これは[1]の 2×3 行列に B を掛けて得られる行列なので、結果は 2×3 行列にならず不適である。

[3] $(BA)^n D$ ($n \geq 0$) のとき

これは、 1×3 行列 D を $(-2)^n$ 倍した行列であるから、 2×3 行列にはならず不適である。

[4] $A(BA)^n D$ ($n \geq 0$) のとき

$$A(BA)^n D = (-2)^n AD = (-2)^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

となる。

以上、[1]から[4]より、 A, B, C, D の 2 つ以上の積として得られる 2×3 行列は、 n を 0 以上の整数として、

$$(-2)^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, (-2)^n \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ -13 & -17 & -21 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \ (-2)^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, (-2)^n \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ -13 & -17 & -21 \end{pmatrix} \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

3

(1)

実数 a, b を用いて点 P を通る楕円 E の接線を

$$y = ax + b \quad \dots \textcircled{1}$$

で表す。これが $P(p, q)$ を通るので、

$$\begin{aligned} q &= ap + b \\ \therefore b &= q - ap \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y = ax + q - ap \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②と楕円 E が接するので、

$$\begin{aligned} x^2 + 4(ax + q - ap)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (4a^2 + 1)x^2 + 8a(q - ap)x + 4\{(q - ap)^2 - 1\} &= 0 \end{aligned}$$

の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow 16a^2(q - ap)^2 - 4(4a^2 + 1)\{(q - ap)^2 - 1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (4 - p^2)a^2 + 2pq \cdot a + 1 - q^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。上式の解が k_1, k_2 であるから、解と係数の関係より、 $p \neq \pm 2$ に注意して、

$$k_1 + k_2 = \frac{2pq}{p^2 - 4}, k_1 k_2 = \frac{q^2 - 1}{p^2 - 4}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad k_1 + k_2 = \frac{2pq}{p^2 - 4}, k_1 k_2 = \frac{q^2 - 1}{p^2 - 4}$$

(2)

(1)より、2つの直線の傾きの積が -1 となればよいので、 $p \neq \pm 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{q^2 - 1}{p^2 - 4} &= -1 \\ \Leftrightarrow q^2 - 1 &= 4 - p^2 \\ \therefore p^2 + q^2 &= 5 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。 $p = \pm 2$ のとき、 $x = \pm 2$ が一つの接線となっている。 $p = \pm 2$ を③式に代入すると、

$$\pm 4qa = q^2 - 1$$

となるが、上式に $q = 0$ を代入すると、 $0 = -1$ になるので不適である。したがって、 $q \neq 0$ のもとで、

$$\begin{aligned} \pm 4qa &= q^2 - 1 \\ \Leftrightarrow a &= \pm \frac{q^2 - 1}{4q} \end{aligned}$$

と変形できる。もうひとつの接線の傾きは 0 であるから、

$$\begin{aligned} \pm \frac{q^2 - 1}{4q} &= 0 \\ \therefore q &= \pm 1 \end{aligned}$$

となる。以上より、 $p = \pm 2$ のとき、

$$(p, q) = (2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$$

となるとき2つの接線は直交する。これらは④を満たすので、 l_1, l_2 が垂直となるような点 P の軌跡は、

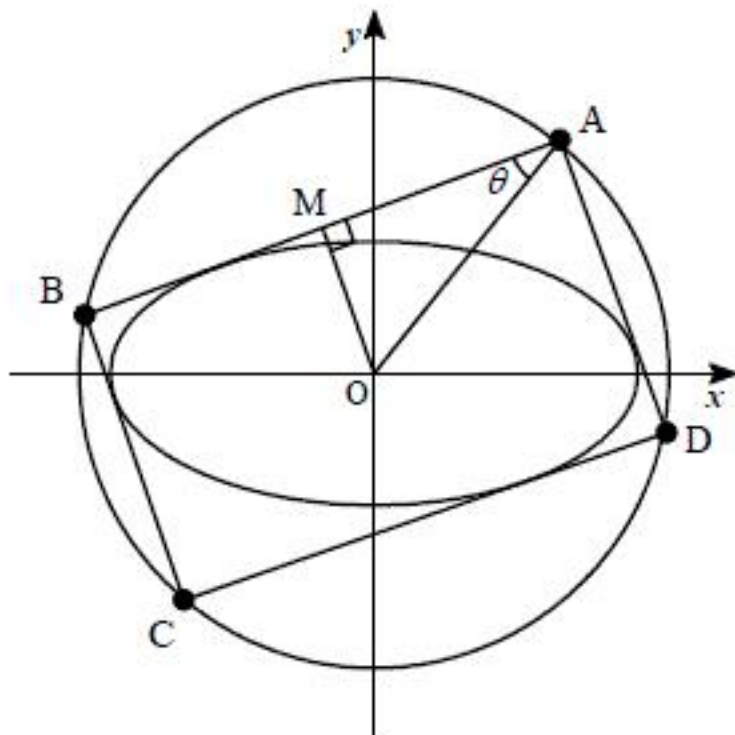
$$x^2 + y^2 = 5$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 = 5$$

(3)

題意から、長方形の各辺は楕円 E の接線となるから、各頂点から楕円 E にひかれる接線は直交する。したがって、各頂点は、(2)で求めた円周上にある。



上図より、 $OA = \sqrt{5}$ だから、

$$\begin{aligned} AB &= 2 \cdot \sqrt{5} \cos \theta = 2\sqrt{5} \cos \theta \\ AD &= 2 \cdot \sqrt{5} \sin \theta = 2\sqrt{5} \sin \theta \end{aligned}$$

であり、求める面積は、

$$(2\sqrt{5} \cos \theta)(2\sqrt{5} \sin \theta) = 10 \sin 2\theta$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 10 \sin 2\theta$$

(4)

ABの中点をMとおくと、

$$\theta \text{ が最小} \Leftrightarrow OM \text{ が最小}$$

であるから、Mが短軸上にあるとき θ は最小となり、長軸上にあるとき最大となる。したがって、長軸の長さは4、短軸の長さは2であることから、

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \sin \theta \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

となる。ここで、鋭角 α, β を $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ とする角とすれば、

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

であり、また、 $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ および、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ における $\sin x$ の単調増加性から、

$$\alpha < \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 2\alpha < \frac{\pi}{2} < 2\beta$$

となることがわかる。したがって、

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{4}{5}$$

となることから、 $\sin 2\theta$ の変域は、 $\frac{4}{5} \leq \sin 2\theta \leq 1$ となり、(3)より、長方形 ABCD の面積は、

$$\text{最大値: } 10, \text{ 最小値: } 8$$

となることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } 10, \text{ 最小値: } 8$$

(1)

CP の延長線と AB との交点を M とすると、

$$AM:BM = \triangle PCA:\triangle PBC = y:x \quad \dots \textcircled{1}$$

である。これより、

$$MP:PC = \triangle PAM:\triangle PCA = z \cdot \frac{y}{x+y} : y = z:x+y \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①と内分点公式から、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}}{x+y}$$

となる。同様にして、②と内分点公式から、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{(x+y)\overrightarrow{OM} + z\overrightarrow{OC}}{z+(x+y)} \\ &= \frac{x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}}{x+y+z} \end{aligned}$$

と表されることが示された。

(証明終)

(2)

内心の定義から各辺と I までの距離は等しいので、

$$\triangle IBC:\triangle ICA:\triangle IAB = a:b:c$$

となる。したがって、(1)で証明された式に

$$(x, y, z) = (a, b, c)$$

を代入すればよいから、

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

(3)

鋭角三角形であることから、外心 Q は $\triangle ABC$ の内部にあり、円周角の定理から、

$$\angle AQB = 2\{\pi - (\alpha + \beta)\}$$

$$\angle BQC = 2\alpha$$

$$\angle CQA = 2\beta$$

となる。ここで、外接円の半径を R とおくと、

$$\triangle BQC = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha$$

$$\triangle CQA = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta$$

$$\triangle AQB = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\{\pi - (\alpha + \beta)\} = -\frac{1}{2}R^2 \sin 2(\alpha + \beta)$$

となるので、

$$\triangle BQC:\triangle CQA:\triangle AQB = \sin 2\alpha:\sin 2\beta:-\sin 2(\alpha + \beta)$$

と求まる。したがって、(1)より、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\sin 2\alpha \overrightarrow{OA} + \sin 2\beta \overrightarrow{OB} - \sin 2(\alpha + \beta) \overrightarrow{OC}}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2(\alpha + \beta)}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\sin 2\alpha \overrightarrow{OA} + \sin 2\beta \overrightarrow{OB} - \sin 2(\alpha + \beta) \overrightarrow{OC}}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2(\alpha + \beta)}$$