

(1)

$k \times l$ 行列と $m \times n$ 行列の積が定義できるのは、 $l = m$ のときだけであることに注意すると、積が定義できるのは次の 4 通りに限ることがわかる。

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AD = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 3 = -2$$

$$BC = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (13 \ 17 \ 21)$$

$$(\text{答}) \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, AD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, BA = -2, BC = (13 \ 17 \ 21)$$

(2)

正方行列のときのみ、 n 乗を考えることができるので、

$$(AB)^n = A(BA)^{n-1}B = A \cdot (-2)^{n-1}B = (-2)^{n-1}AB = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^n = (-2)^n$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (AB)^n = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, (BA)^n = (-2)^n$$

(3)

行列に右から順に別の行列を掛けていくことを考えると、(1)の結果から、 C や D には右から別の種類の行列を掛けられないことがわかる。また、 A から D のどの行列も、自分自身との積は考えられないから、 A から D までを掛け合わせて得られる行列は次のいずれかの形となる。以下、 k 次正方行列の 0 乗は k 次単位行列を表すものとする。

[1] $(AB)^n C$ ($n \geq 0$) のとき

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ -13 & -17 & -21 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^n C = A(BA)^{n-1}BC = (-2)^{n-1}ABC = (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ -13 & -17 & -21 \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

となる。

[2] $B(AB)^n C$ ($n \geq 0$) のとき

これは[1]の 2×3 行列に B を掛けて得られる行列なので、結果は 2×3 行列にならず不適である。

[3] $(BA)^n D$ ($n \geq 0$) のとき

これは、 1×3 行列 D を $(-2)^n$ 倍した行列であるから、 2×3 行列にはならず不適である。

[4] $A(BA)^n D$ ($n \geq 0$) のとき

$$A(BA)^n D = (-2)^n AD = (-2)^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

となる。

以上、[1]から[4]より、 A, B, C, D の 2 つ以上の積として得られる 2×3 行列は、 n を 0 以上の整数として、

$$(-2)^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, (-2)^n \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ -13 & -17 & -21 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (-2)^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, (-2)^n \begin{pmatrix} 13 & 17 & 21 \\ -13 & -17 & -21 \end{pmatrix} \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

2

(1)

$$\text{右辺} = 0 \Leftrightarrow y = 0, 3$$

であるから、曲線 C は $(100, 0), (100, 3)$ を通ることが分かる。また、

$$\text{左辺} \geq 0$$

であることから、

$$y \geq 0$$

となる。また、左辺に $x = 100 + a (a > 0)$ を代入すると、

$$|x - 100| = |100 + a - 100| = |a| = a$$

となり、 $x = 100 - a$ を代入すると、

$$|x - 100| = |100 - a - 100| = |-a| = a$$

となるので、曲線 C は $x = 100$ に対して対称である。このことをふまえて、

[1] $x \geq 100, y \geq 3$ のとき、

$$|x - 100| = y|y - 3|e^y$$

$$\Leftrightarrow x = y(y - 3)e^y + 100$$

となるが、 $y \geq 3$ では、 $y(y - 3), e^y$ とともに単調増加するので、 $y(y - 3)e^y + 100$ は単調増加する。

[2] $x \geq 100, 0 \leq y < 3$ のとき、

$$|x - 100| = y|y - 3|e^y$$

$$\Leftrightarrow x = -y(y - 3)e^y + 100$$

となるので、 $f(y) = -y(y - 3)e^y$ とおくと、

$$f'(y) = (-2y + 3)e^y - y(y - 3)e^y$$

$$= (-y^2 + y + 3)e^y$$

$$= -\left(y - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(y - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)e^y$$

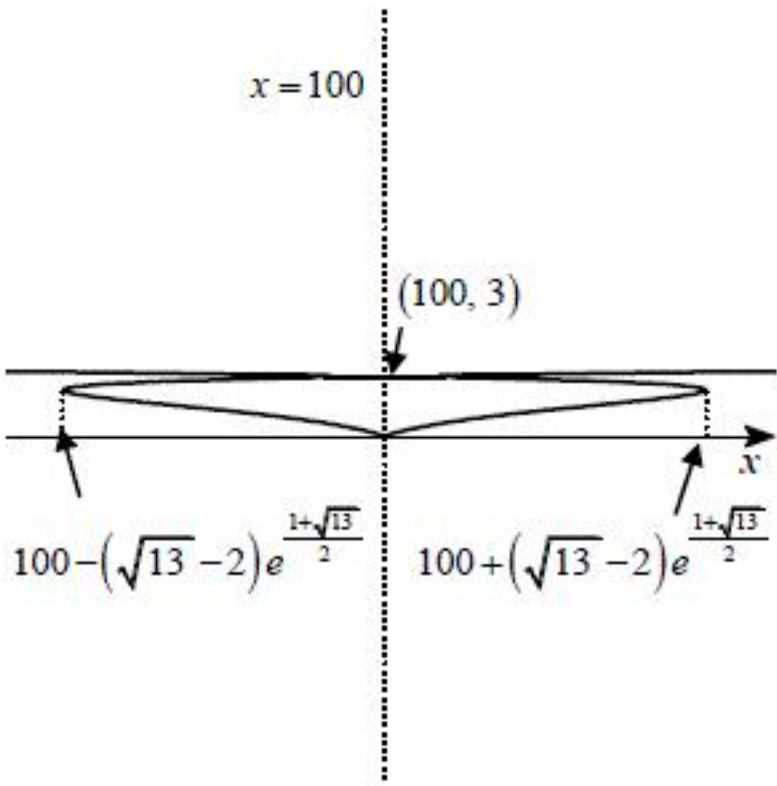
であるから、

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

となる。したがって、 $f(y)$ の $0 \leq y < 3$ での増減表は下のとおりである。

y	0	...	$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$	...	(3)
$f'(y)$		+	0	-	
$f(y)$		$\nearrow$	$(\sqrt{13} - 2)e^{\frac{1 + \sqrt{13}}{2}}$	$\searrow$	

C は $x = 100$ に対して対称であることに注意すると、以上[1], [2]より、 C の概形は下図のとおりである。



(答) 前図

(2)

(1)の図より、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S &= \int_0^3 (x - 100) dy \\ &= \int_0^3 -y(y - 3)e^y dy \\ &= \int_0^3 \{(-y^2 + 3y)e^y\} dy \\ &= \left[(-y^2 + 3y)e^y\right]_0^3 - \int_0^3 (-2y + 3)e^y dy \\ &= \left[(2y - 3)e^y\right]_0^3 - 2 \int_0^3 e^y dy \\ &= 3e^3 + 3 - 2[e^y]_0^3 \\ &= 3e^3 + 3 - 2(e^3 - 1) \\ &= e^3 + 5 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 2e^3 + 10$$

と求まる。

(答) $2e^3 + 10$