$\boxed{1}$

(1)

各作業においてそれぞれのカードを引く確率は$\frac{1}{3}$である。n回の作業を行った結果，1点を獲得するのは，引いた数字がすべて1である場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$$

である。

(答) $\frac{1}{3^n}$

(2)

n回の作業を行った結果，2点を獲得するのは，引いた数字の少なくとも1つが2であり，残りがすべて1である場合である。この事象は，1または2をn回引く事象からn回すべてにおいて1を引く事象を除いたものであるから，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-1}{3^n}$$

である。

(答) $\frac{2^n-1}{3^n}$

(3)

n回の作業を行った結果，3点を獲得するのは，引いた数字の少なくとも1つが3であり，残りがすべて同じ数字のカードである場合である。このようになる事象は

[1] n回すべてにおいて3を引く場合

[2] n回の作業において1または3を少なくとも1回ずつ引く場合

[3] n回の作業において2または3を少なくとも1回ずつ引く場合

がある。

[1] n回すべてにおいて3を引く場合

このようになる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$$

である。

[2] n回の作業において1または3を少なくとも1回ずつ引く場合

この事象は，1または3をn回引く事象からn回すべてにおいて1または3のいずれかのみを引く事象を除いたものであるから，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-2}{3^n}$$

である。

[3] n回の作業において2または3を少なくとも1回ずつ引く場合

この事象は，2または3をn回引く事象からn回すべてにおいて2または3のいずれかのみを引く事象を除いたものであるから，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-2}{3^n}$$

である。

以上[1], [2], [3]より，これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{3^n}+\frac{2^n-2}{3^n}+\frac{2^n-2}{3^n}=\frac{2^{n+1}-3}{3^n}$$

となる。

(答) $\frac{2^{n+1}-3}{3^n}$

(4)

n回作業したときに獲得する得点の期待値をE_nとすると，(1), (2), (3)の結果を用いて

$$\begin{aligned}E_n&=1\times\frac{1}{3^n}+2\times\frac{2^n-1}{3^n}+3\times\frac{2^{n+1}-3}{3^n}\\&=\frac{2^{n+3}-10}{3^n}\end{aligned}$$

となるから，$E'_n=E_{n+1}-E_n$とおくと

$$\begin{aligned}E'_n&=E_{n+1}-E_n\\&=\frac{2^{n+4}-10}{3^{n+1}}-\frac{2^{n+3}-10}{3^n}\\&=\frac{2\cdot2^{n+3}-10}{3^{n+1}}-\frac{3\cdot2^{n+3}-30}{3^{n+1}}\\&=\frac{20-2^{n+3}}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

となる。

$$2^4<20<2^5$$

であるから

$n=1$のとき，$E'_n>0\Leftrightarrow E_n<E_{n+1}$

$n\geqq2$のとき，$E'_n<0\Leftrightarrow E_n>E_{n+1}$

となる。以上より

$$E_1<E_2>E_3>E_4>\cdots$$

であるから，獲得する得点の期待値が最大になるような作業の回数nの値は

$$n=2$$

であり，このときの期待値は

$$\begin{aligned}E_2&=\frac{2^5-10}{3^2}\\&=\frac{22}{9}\end{aligned}$$

となる。

(答) $n=2$，期待値$\frac{22}{9}$

2

$\triangle OP_1P_2$，$\triangle OP_1P_3$，$\triangle OP_2P_3$ において，余弦定理より

$$\begin{aligned} P_1P_2{}^2 &= OP_1{}^2 + OP_2{}^2 - 2OP_1 \cdot OP_2 \cos\angle P_1OP_2 \\ &= 1^2 + x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{3} \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1P_3{}^2 &= OP_1{}^2 + OP_3{}^2 - 2OP_1 \cdot OP_3 \cos\angle P_1OP_3 \\ &= 1^2 + y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{3} \\ &= y^2 - y + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2P_3{}^2 &= OP_2{}^2 + OP_3{}^2 - 2OP_2 \cdot OP_3 \cos\angle P_2OP_3 \\ &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta \end{aligned}$$

となる。$\triangle P_1P_2P_3$ が正三角形となるとき

$$\begin{aligned} & P_1P_2 = P_1P_3 = P_2P_3 \\ \Leftrightarrow\ & P_1P_2{}^2 = P_1P_3{}^2 = P_2P_3{}^2 \ (\because P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_2P_3 > 0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} P_1P_2{}^2 = P_1P_3{}^2 \\ P_1P_2{}^2 = P_2P_3{}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} & P_1P_2{}^2 = P_1P_3{}^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x + 1 = y^2 - y + 1 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)(x+y-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = x,\ 1-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_1P_2{}^2 = P_2P_3{}^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x + 1 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta \\ \Leftrightarrow\ & x + y^2 - 1 - 2xy\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

となるから，$\triangle P_1P_2P_3$ が正三角形となるとき

$$\begin{cases} y = x,\ 1-x & \cdots ① \\ x + y^2 - 1 - 2xy\cos\theta = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

を満たす正の実数 $x,\ y$ が存在する。

[1] $y = x$ のとき

②より

$$\begin{aligned} & x + x^2 - 1 - 2x^2\cos\theta = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2\cos\theta - 1)x^2 - x + 1 = 0 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

となり，これを満たす正の実数 x の値が存在するとき，①，②を同時に満たす正の実数 y の値も存在する。ここで，$f(x) = (2\cos\theta - 1)x^2 - x + 1$ とおく。

[i] $\cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき

③を満たす正の実数 x の値は $x = 1$ が存在する。

[ii] $\cos\theta < \frac{1}{2}$ のとき

x についての方程式③の解は，関数 $Y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標である。

$\cos\theta < \frac{1}{2}$ のとき関数 $Y = f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり

$f(0) = 1 > 0$

であることから，関数 $Y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点は $x > 0$ の範囲に存在するから，③を満たす正の実数 x の値は存在する。

[iii] $\cos\theta > \frac{1}{2}$ のとき

x についての方程式③の解は，関数 $Y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標である。

$\cos\theta > \frac{1}{2}$ のとき関数 $Y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\cos\theta - 1)x^2 - x + 1 \\ &= (2\cos\theta - 1)\left\{x - \frac{1}{2(2\cos\theta - 1)}\right\}^2 + 1 - \frac{1}{4(2\cos\theta - 1)} \end{aligned}$$

より，この放物線の軸について

$$\frac{1}{2(2\cos\theta - 1)} > 0$$

となる。よって，関数 $Y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点が $x > 0$ の範囲に存在するとき，放物線 $Y = f(x)$ の頂点の Y 座標について

$$1 - \frac{1}{4(2\cos\theta - 1)} \leqq 0$$

が成り立つ。これを満たすような $\cos\theta$ の範囲は

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{4(2\cos\theta - 1)} \leqq 0 \text{ かつ } \cos\theta > \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\theta \leqq \frac{5}{8} \text{ かつ } \cos\theta > \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} < \cos\theta \leqq \frac{5}{8} \end{aligned}$$

となる。

以上[i], [ii], [iii]より，$0 < \theta \leqq \frac{2\pi}{3}$ と合わせて，

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{5}{8}$$

となる。

[2] $y = 1 - x$ のとき

②より

$$\begin{aligned} & x + (1-x)^2 - 1 - 2x(1-x)\cos\theta = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1-x)^2 - (1-x) - 2x(1-x)\cos\theta = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1-x)\{(1-x) - 1 - 2x\cos\theta\} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2\cos\theta + 1)x(x-1) = 0 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

となる。$x,\ y$ が正の実数であるとき

$$\begin{aligned} & x > 0,\ y > 0 \\ \Leftrightarrow\ & x > 0,\ 1 - x > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

であるから

$$x(x-1) < 0$$

となり，④が成り立つような正の実数 $x,\ y$ が存在するような $\cos\theta$ の範囲は

$$\begin{aligned} & 2\cos\theta + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\theta = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より，求める $\cos\theta$ の範囲は

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{5}{8}$$

である。

(答) $-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{5}{8}$

$\boxed{3}$

(1)

放物線 $C: y=x^2+6$ 上の点Pの座標を $\left(p,\ p^2+6\right)$ とおく。点Pを固定したとき，直線 $l: y=2x$ 上の点Qに対してPQが最小となるのは，点Qが点Pから直線 l に下ろした垂線の足に一致するときであり，このときのPQの値は点Pと直線 l の距離に等しい。この値を $f(p)$ とおくと

$$f(p)=\frac{\left|2p-\left(p^2+6\right)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{\left|-(p-1)^2-5\right|}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{(p-1)^2+5}{\sqrt{5}}\ \left(\because (p-1)^2+5>0\right)$$

となる。点Pが C 上を動くとき，PQの最小値は p の関数 $f(p)$ の最小値に等しく，p の値はすべての実数をとり得ることから，$p=1$ のとき最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

(答) $\sqrt{5}$

(2)

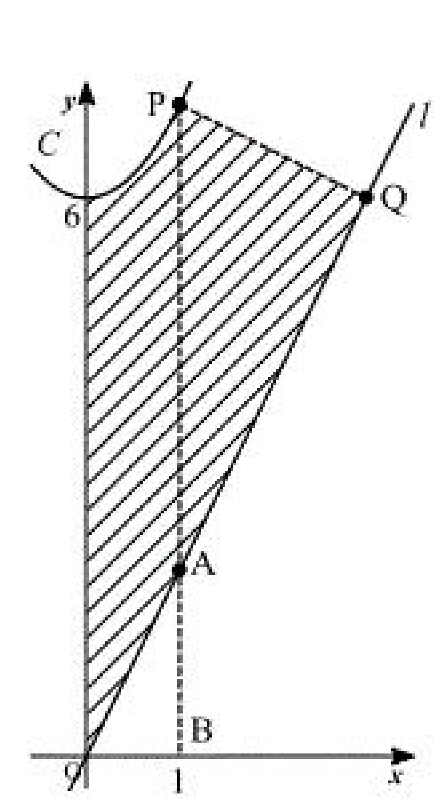
(1)の結果より，点Pの座標は $(1,\ 7)$ である。このとき，直線PQは点Pを通り直線 l に垂直であるから，この直線を m とすると，直線 m の方程式は

$$m: y=-\frac{1}{2}(x-1)+7$$

となる。点Qは直線 l と直線 m の交点であるから，その座標は

$$\begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}(x-1)+7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2x=-\frac{1}{2}(x-1)+7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x,\ y)=(3,\ 6)$$

となる。さらに，$\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$ とおくと，線分PQ，放物線 C，直線 l，及び y 軸で囲まれた領域は下図の斜線部のようになる。



このとき，$\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{Q}(3,\ 6)$ より

$$\mathrm{AQ}=\frac{2}{3}\mathrm{OQ}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{3^2+6^2}$$
$$=2\sqrt{5}$$

となり，$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AQ}$ であるから

$$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{PQ}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$$
$$=5$$

となる。また

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{AB}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$$
$$=1$$

である。よって，求める面積は

$$\int_0^1\left(x^2+6\right)dx-\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{APQ}=\left[\frac{1}{3}x^3+6x\right]_0^1-1+5$$
$$=\frac{19}{3}-1+5$$
$$=\frac{31}{3}$$

である。

(答) $\frac{31}{3}$

(3)

放物線 $C: y=x^2+6$ 上の点Pと直線 $l_k: y=2kx-5$ 上の点Rについて，PRの最小値が1となるとき，C と l_k は交点をもたないから，x についての方程式

$$x^2+6=2kx-5$$
$$\Leftrightarrow x^2-2kx+11=0 \qquad \cdots ①$$

は実数解をもたない。よって，方程式①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-11<0$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{11}<k<\sqrt{11}$$

となる。このもとで，点Pの座標を $\left(p,\ p^2+6\right)$ とおく。点Pを固定したとき，直線 l_k 上の点Rに対してPRが最小となるのは，点Rが点Pから直線 l に下ろした垂線の足に一致するときであり，このときのPRの値は点Pと直線 l_k の距離に等しい。この値を $g(p)$ とおくと

$$g(p)=\frac{\left|2kp-\left(p^2+6\right)-5\right|}{\sqrt{(2k)^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{\left|-(p-k)^2+k^2-11\right|}{\sqrt{4k^2+1}}$$
$$=\frac{(p-k)^2-k^2+11}{\sqrt{4k^2+1}}\ \left(\because k^2-11<0 \text{ より，} -(p-k)^2+k^2-11<0\right)$$

となる。点Pが C 上を動くとき，PRの最小値は p の関数 $g(p)$ の最小値に等しく，p の値はすべての実数をとり得ることから，$p=k$ のとき最小値 $g(k)$ をとる。この値が1となるとき

$$g(k)=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{-k^2+11}{\sqrt{4k^2+1}}=1$$
$$\Leftrightarrow \left(-k^2+11\right)^2=\left(4k^2+1\right)\ \left(\because -k^2+11>0\right)$$
$$\Leftrightarrow k^4-26k^2+120=0$$
$$\Leftrightarrow \left(k^2-6\right)\left(k^2-20\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(k+\sqrt{6}\right)\left(k-\sqrt{6}\right)\left(k+2\sqrt{5}\right)\left(k-2\sqrt{5}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{6}\ \left(\because -\sqrt{11}<k<\sqrt{11}\right)$$

となる。

(答) $\pm\sqrt{6}$