1

(1)

各作業においてそれぞれのカードを引く確率は$\frac{1}{3}$である。n回の作業を行った結果, 1点を獲得するのは, 引いた数字がすべて1である場合であるから, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$$

である。

(答) $\frac{1}{3^n}$

(2)

n回の作業を行った結果, 2点を獲得するのは, 引いた数字の少なくとも1つが2であり, 残りがすべて1である場合である。この事象は, 1または2をn回引く事象からn回すべてにおいて1を引く事象を除いたものであるから, 求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-1}{3^n}$$

である。

(答) $\frac{2^n-1}{3^n}$

(3)

n回の作業を行った結果, 2点を獲得するのは, 引いた数字の少なくとも1つが3であり, 残りがすべて同じ数字のカードである場合である。このようになる事象は

[1] n回すべてにおいて3を引く場合

[2] n回の作業において1または3を少なくとも1回ずつ引く場合

[3] n回の作業において2または3を少なくとも1回ずつ引く場合

がある。

[1] n回すべてにおいて3を引く場合

このようになる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$$

である。

[2] n回の作業において1または3を少なくとも1回ずつ引く場合

この事象は, 1または3をn回引く事象からn回すべてにおいて1または3のいずれかのみを引く事象を除いたものであるから, 求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-2}{3^n}$$

である。

[3] n回の作業において2または3を少なくとも1回ずつ引く場合

この事象は, 2または3をn回引く事象からn回すべてにおいて2または3のいずれかのみを引く事象を除いたものであるから, 求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-2}{3^n}$$

である。

以上, [1], [2], [3]は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{3^n}+\frac{2^n-2}{3^n}+\frac{2^n-2}{3^n}=\frac{2^{n+1}-3}{3^n}$$

となる。

(答) $\frac{2^{n+1}-3}{3^n}$

(4)

n回作業したときに獲得する得点の期待値をE_nとすると, (1), (2), (3)の結果を用いて

$$\begin{aligned}E_n&=1\times\frac{1}{3^n}+2\times\frac{2^n-1}{3^n}+3\times\frac{2^{n+1}-3}{3^n}\\&=\frac{2^{n+3}-10}{3^n}\end{aligned}$$

となるから, $E_n'=E_{n+1}-E_n$とおくと

$$\begin{aligned}E_n'&=E_{n+1}-E_n\\&=\frac{2^{n+4}-10}{3^{n+1}}-\frac{2^{n+3}-10}{3^n}\\&=\frac{2\cdot2^{n+3}-10}{3^{n+1}}-\frac{3\cdot2^{n+3}-30}{3^{n+1}}\\&=\frac{20-2^{n+3}}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

となる。

$$2^4<20<2^5$$

であるから

$n=1$のとき, $E_n'>0\Leftrightarrow E_n<E_{n+1}$

$n\geqq2$のとき, $E_n'<0\Leftrightarrow E_n>E_{n+1}$

となる。以上より,

$$E_1<E_2>E_3>E_4>\cdots$$

であるから, 獲得する得点の期待値が最大になるような作業の回数nの値は

$$n=2$$

であり, このときの期待値は

$$\begin{aligned}E_2&=\frac{2^5-10}{3^2}\\&=\frac{22}{9}\end{aligned}$$

となる。

(答) $n=2$, 期待値$\frac{22}{9}$

2

$OP_1=x,\ OP_2=y,\ OP_3=z$ とおく。$\triangle OP_1P_2$, $\triangle OP_1P_3$, $\triangle OP_2P_3$ において，余弦定理より

$$\begin{aligned}P_1P_2{}^2&=OP_1{}^2+OP_2{}^2-2OP_1\cdot OP_2\cos\angle P_1OP_2\\&=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}\\&=x^2+y^2-xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_1P_3{}^2&=OP_1{}^2+OP_3{}^2-2OP_1\cdot OP_3\cos\angle P_1OP_3\\&=x^2+z^2-2xz\cos\frac{\pi}{3}\\&=x^2+z^2-xz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_2P_3{}^2&=OP_2{}^2+OP_3{}^2-2OP_2\cdot OP_3\cos\angle P_2OP_3\\&=y^2+z^2-2yz\cos\theta\end{aligned}$$

となる。$\triangle P_1P_2P_3$ が正三角形となるとき

$$\begin{aligned}&P_1P_2=P_1P_3=P_2P_3\\&\Leftrightarrow P_1P_2{}^2=P_1P_3{}^2=P_2P_3{}^2\ (\because P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_2P_3>0)\\&\Leftrightarrow\begin{cases}P_1P_2{}^2=P_1P_3{}^2\\P_1P_2{}^2=P_2P_3{}^2\end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}&P_1P_2{}^2=P_1P_3{}^2\\&\Leftrightarrow x^2+y^2-xy=x^2+z^2-xz\\&\Leftrightarrow (y-z)(y+z-x)=0\\&\Leftrightarrow y=z,\ x-z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P_1P_2{}^2=P_2P_3{}^2\\&\Leftrightarrow x^2+y^2-xy=y^2+z^2-2yz\cos\theta\\&\Leftrightarrow x^2-z^2-xy+2yz\cos\theta=0\end{aligned}$$

となるから，$\triangle P_1P_2P_3$ が正三角形となるとき

$$\begin{cases}y=z,\ x-z & \cdots ①\\ x^2-z^2-xy+2yz\cos\theta=0 & \cdots ②\end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y, z が存在する。

[1] $y=z$ のとき

②より

$$\begin{aligned}&x^2-z^2-xz+2z^2\cos\theta=0\\&\Leftrightarrow(2\cos\theta-1)z^2-xz+x^2=0\qquad\cdots ③\end{aligned}$$

となり，これを満たす正の実数 x, z の値が存在するとき，①, ②を同時に満たす正の実数 y の値も存在する。さらに，③を満たす正の実数 z が存在するとき，③の両辺を $z^2(\neq 0)$ で割ると

$$2\cos\theta-1-\frac{x}{z}+\left(\frac{x}{z}\right)^2=0$$

となり，$t=\dfrac{x}{z}$ とおくと

$$t^2-t+2\cos\theta-1=0\qquad\cdots ④$$

となる。③を満たす正の実数 x, z の値が存在するとき，④を満たす正の実数 t が存在する。ここで，$f(t)=t^2-t+2\cos\theta-1$ とおく。t についての方程式④の解は，関数 $Y=f(t)$ のグラフと t 軸の交点の t 座標であるから，④を満たす正の実数 t が存在するとき，関数 $Y=f(t)$ のグラフと t 軸の交点が $t>0$ の範囲に存在する。関数 $Y=f(t)$ のグラフは下に凸の放物線であり

$$\begin{aligned}f(t)&=t^2-t+2\cos\theta-1\\&=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2\cos\theta-\frac{5}{4}\end{aligned}$$

より，この放物線の軸 $t=\dfrac{1}{2}$ は $t>0$ の範囲に存在するから，関数 $Y=f(t)$ のグラフと t 軸の交点が $t>0$ の範囲に存在するとき，放物線 $Y=f(t)$ の頂点の Y 座標について

$$2\cos\theta-\frac{5}{4}\leqq 0$$

が成り立つ。これを満たすような $\cos\theta$ の範囲は

$$\begin{aligned}&2\cos\theta-\frac{5}{4}\leqq 0\ \text{かつ}\ 0<\theta\leqq\frac{2\pi}{3}\\&\Leftrightarrow\cos\theta\leqq\frac{5}{8}\ \text{かつ}\ -\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1\\&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\frac{5}{8}\end{aligned}$$

となる。

[2] $y=x-z$ のとき

②より

$$\begin{aligned}&x^2-z^2-x(x-z)+2(x-z)z\cos\theta=0\\&\Leftrightarrow(x-z)(x+z)-x(x-z)+2(x-z)z\cos\theta=0\\&\Leftrightarrow z(x-z)(2\cos\theta+1)=0\qquad\cdots ⑤\end{aligned}$$

となる。x, y, z が正の実数であるとき

$$\begin{aligned}&x>0,\ y>0,\ z>0\\&\Leftrightarrow x>0,\ x-z>0,\ z>0\\&\Leftrightarrow 0<z<x\end{aligned}$$

であるから

$$z(x-z)>0$$

となり，⑤が成り立つような正の実数 x, y, z が存在するような $\cos\theta$ の範囲は

$$\begin{aligned}&2\cos\theta+1=0\\&\Leftrightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

以上，[1], [2]より，求める $\cos\theta$ の範囲は

$$-\frac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\frac{5}{8}$$

である。

(答) $-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{5}{8}$