$\boxed{1}$

(1)

各作業においてそれぞれのカードを引く確率は$\frac{1}{3}$である。n回の作業を行った結果，1点を獲得するのは，引いた数字がすべて1である場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$$

である。

(答) $\frac{1}{3^n}$

(2)

n回の作業を行った結果，2点を獲得するのは，引いた数字の少なくとも1つが2であり，残りがすべて1である場合である。この事象は，1または2をn回引く事象からn回すべてにおいて1を引く事象を除いたものであるから，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-1}{3^n}$$

である。

(答) $\frac{2^n-1}{3^n}$

(3)

n回の作業を行った結果，2点を獲得するのは，引いた数字の少なくとも1つが3であり，残りがすべて同じ数字のカードである場合である。このようになる事象は

[1] n回すべてにおいて3を引く場合

[2] n回の作業において1または3を少なくとも1回ずつ引く場合

[3] n回の作業において2または3を少なくとも1回ずつ引く場合

がある。

[1] n回すべてにおいて3を引く場合

このようになる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$$

である。

[2] n回の作業において1または3を少なくとも1回ずつ引く場合

この事象は，1または3をn回引く事象からn回すべてにおいて1または3のいずれかのみを引く事象を除いたものであるから，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-2}{3^n}$$

である。

[3] n回の作業において2または3を少なくとも1回ずつ引く場合

この事象は，2または3をn回引く事象からn回すべてにおいて2または3のいずれかのみを引く事象を除いたものであるから，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-2}{3^n}$$

である。

以上，[1], [2], [3]は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{3^n}+\frac{2^n-2}{3^n}+\frac{2^n-2}{3^n}=\frac{2^{n+1}-3}{3^n}$$

となる。

(答) $\frac{2^{n+1}-3}{3^n}$

(4)

n回作業したときに獲得する得点の期待値をE_nとすると，(1), (2), (3)の結果を用いて

$$E_n=1\times\frac{1}{3^n}+2\times\frac{2^n-1}{3^n}+3\times\frac{2^{n+1}-3}{3^n}$$
$$=\frac{2^{n+3}-10}{3^n}$$

となるから，$E_n'=E_{n+1}-E_n$とおくと

$$E_n'=E_{n+1}-E_n$$
$$=\frac{2^{n+4}-10}{3^{n+1}}-\frac{2^{n+3}-10}{3^n}$$
$$=\frac{2\cdot2^{n+3}-10}{3^{n+1}}-\frac{3\cdot2^{n+3}-30}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{20-2^{n+3}}{3^{n+1}}$$

となる。

$$2^4<20<2^5$$

であるから

$n=1$のとき，$E_n'>0\Leftrightarrow E_n<E_{n+1}$

$n\geqq2$のとき，$E_n'<0\Leftrightarrow E_n>E_{n+1}$

となる。以上より，

$$E_1<E_2>E_3>E_4>\cdots$$

であるから，獲得する得点の期待値が最大になるような作業の回数nの値は

$$n=2$$

であり，このときの期待値は

$$E_2=\frac{2^5-10}{3^2}$$
$$=\frac{22}{9}$$

となる。

(答) $n=2$，期待値$\frac{22}{9}$

2

$OP_1 = x,\ OP_2 = y,\ OP_3 = z$ とおく。$\triangle OP_1P_2$，$\triangle OP_1P_3$，$\triangle OP_2P_3$ において，余弦定理より

$$\begin{aligned}P_1P_2^{\,2} &= OP_1^{\,2} + OP_2^{\,2} - 2OP_1 \cdot OP_2 \cos\angle P_1OP_2\\ &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}\\ &= x^2 + y^2 - xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_1P_3^{\,2} &= OP_1^{\,2} + OP_3^{\,2} - 2OP_1 \cdot OP_3 \cos\angle P_1OP_3\\ &= x^2 + z^2 - 2xz\cos\frac{\pi}{3}\\ &= x^2 + z^2 - xz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_2P_3^{\,2} &= OP_2^{\,2} + OP_3^{\,2} - 2OP_2 \cdot OP_3 \cos\angle P_2OP_3\\ &= y^2 + z^2 - 2yz\cos\theta\end{aligned}$$

となる。$\triangle P_1P_2P_3$ が正三角形となるとき

$$\begin{aligned}&P_1P_2 = P_1P_3 = P_2P_3\\ \Leftrightarrow\ &P_1P_2^{\,2} = P_1P_3^{\,2} = P_2P_3^{\,2}\ (\because P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_2P_3 > 0)\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}P_1P_2^{\,2} = P_1P_3^{\,2}\\ P_1P_2^{\,2} = P_2P_3^{\,2}\end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}&P_1P_2^{\,2} = P_1P_3^{\,2}\\ \Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 - xy = x^2 + z^2 - xz\\ \Leftrightarrow\ &(y - z)(y + z - x) = 0\\ \Leftrightarrow\ &y = z,\ x - z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P_1P_2^{\,2} = P_2P_3^{\,2}\\ \Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 - xy = y^2 + z^2 - 2yz\cos\theta\\ \Leftrightarrow\ &x^2 - z^2 - xy + 2yz\cos\theta = 0\end{aligned}$$

となるから，$\triangle P_1P_2P_3$ が正三角形となるとき

$$\begin{cases}y = z,\ x - z & \cdots ①\\ x^2 - z^2 - xy + 2yz\cos\theta = 0 & \cdots ②\end{cases}$$

を満たす正の実数 $x,\ y,\ z$ が存在する。

[1] $y = z$ のとき

②より

$$\begin{aligned}&x^2 - z^2 - xz + 2z^2\cos\theta = 0\\ \Leftrightarrow\ &(2\cos\theta - 1)z^2 - xz + x^2 = 0 \qquad \cdots ③\end{aligned}$$

となり，これを満たす正の実数 $x,\ z$ の値が存在するとき，①，②を同時に満たす正の実数 y の値も存在する。さらに，③を満たす正の実数 z が存在するとき，③の両辺を $z^2(\neq 0)$ で割ると

$$2\cos\theta - 1 - \frac{x}{z} + \left(\frac{x}{z}\right)^2 = 0$$

となり，$t = \dfrac{x}{z}$ とおくと

$$t^2 - t + 2\cos\theta - 1 = 0 \qquad \cdots ④$$

となる。③を満たす正の実数 $x,\ z$ の値が存在するとき，④を満たす正の実数 t が存在する。ここで，$f(t) = t^2 - t + 2\cos\theta - 1$ とおく。t についての方程式④の解は，関数 $Y = f(t)$ のグラフと t 軸の交点の t 座標であるから，④を満たす正の実数 t が存在するとき，関数 $Y = f(t)$ のグラフと t 軸の交点が $t > 0$ の範囲に存在する。関数 $Y = f(t)$ のグラフは下に凸の放物線であり

$$\begin{aligned}f(t) &= t^2 - t + 2\cos\theta - 1\\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\cos\theta - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

より，この放物線の軸 $t = \dfrac{1}{2}$ は $t > 0$ の範囲に存在するから，関数 $Y = f(t)$ のグラフと t 軸の交点が $t > 0$ の範囲に存在するとき，放物線 $Y = f(t)$ の頂点の Y 座標について

$$2\cos\theta - \frac{5}{4} \leqq 0$$

が成り立つ。これを満たすような $\cos\theta$ の範囲は

$$\begin{aligned}&2\cos\theta - \frac{5}{4} \leqq 0 \text{ かつ } 0 < \theta \leqq \frac{2\pi}{3}\\ \Leftrightarrow\ &\cos\theta \leqq \frac{5}{8} \text{ かつ } -\frac{1}{2} \leqq \cos\theta < 1\\ \Leftrightarrow\ &-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{5}{8}\end{aligned}$$

となる。

[2] $y = x - z$ のとき

②より

$$\begin{aligned}&x^2 - z^2 - x(x - z) + 2(x - z)z\cos\theta = 0\\ \Leftrightarrow\ &(x - z)(x + z) - x(x - z) + 2(x - z)z\cos\theta = 0\\ \Leftrightarrow\ &z(x - z)(2\cos\theta + 1) = 0 \qquad \cdots ⑤\end{aligned}$$

となる。$x,\ y,\ z$ が正の実数であるとき

$$\begin{aligned}&x > 0,\ y > 0,\ z > 0\\ \Leftrightarrow\ &x > 0,\ x - z > 0,\ z > 0\\ \Leftrightarrow\ &0 < z < x\end{aligned}$$

であるから

$$z(x - z) > 0$$

となり，⑤が成り立つような正の実数 $x,\ y,\ z$ が存在するような $\cos\theta$ の範囲は

$$\begin{aligned}&2\cos\theta + 1 = 0\\ \Leftrightarrow\ &\cos\theta = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

以上，[1]，[2]より，求める $\cos\theta$ の範囲は

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{5}{8}$$

である。

(答) $-\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{5}{8}$

3

(1)

$x>0$ において

$$f(x)+\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt=3x^2-2x \qquad \cdots ①$$

を満たす多項式 $f(x)$ について，両辺を x で微分すると

$$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=6x-2$$
$$\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=6x^2-2x \qquad \cdots ②$$

となる。多項式 $f(x)$ の次数を $n(>0)$ とすると，$xf'(x)$ の次数は n となるから，②式の両辺の次数を比較して

$$n=2$$

となり，$f(x)$ は 2 次式となる。$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，②より

$$x(2ax+b)+ax^2+bx+c=6x^2-2x$$
$$\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=6x^2-2x$$

となり，これが $x>0$ である x についてつねに成り立つことから

$$a=2,\ b=-1,\ c=0$$

であり

$$f(x)=2x^2-x$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}f(x)+\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt&=2x^2-x+\int_1^x(2t-1)dt\\&=2x^2-x+\left[t^2-t\right]_1^x\\&=2x^2-x+x^2-x\\&=3x^2-2x\end{aligned}$$

であるから，たしかに $f(x)=2x^2-x$ は①を満たす。

(答) $f(x)=2x^2-x$

(2)

$$\begin{aligned}f(x)&=2x^2-x\\&=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

となるから，関数 $f(x)$ のグラフは頂点 $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{8}\right)$ で下に凸の放物線であり

$$f(x)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-x=0$$
$$\Leftrightarrow x(2x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0,\ \frac{1}{2}$$

であるから，$f(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標は $0,\ \frac{1}{2}$ となる。また，$g(x)=1+3\log x$ について，$x>0$ のとき

$$g'(x)=\frac{3}{x}(>0)$$
$$g''(x)=-\frac{3}{x^2}(<0)$$

となるから，$g(x)$ は単調増加関数であり上に凸の曲線であり

$$g(x)=0$$
$$\Leftrightarrow 1+3\log x=0$$
$$\Leftrightarrow \log x=-\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{3}}$$

であるから，$g(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標は $e^{-\frac{1}{3}}$ となる。さらに，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと

$$h(x)=2x^2-x-1-3\log x$$
$$\begin{aligned}h'(x)&=4x-1-\frac{3}{x}\\&=\frac{4x^2-x-3}{x}\\&=\frac{(4x+3)(x-1)}{x}\end{aligned}$$

となるから，$x>0$ における $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘		↗

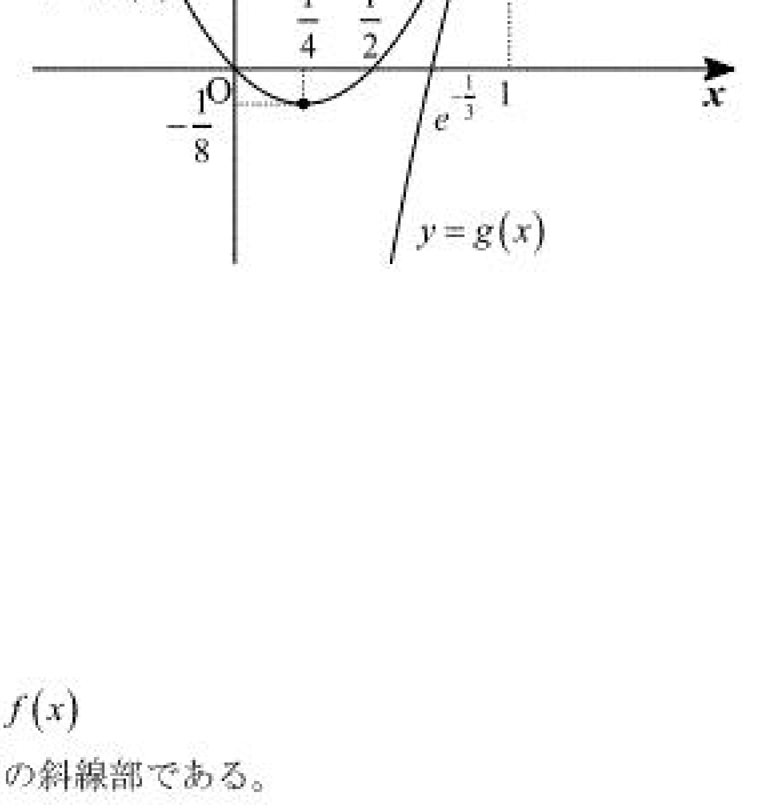
また

$$h(1)=0$$

であるから

$$0<x<1,\ 1<x \text{ のとき } h(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>g(x)$$
$$x=1 \text{ のとき } h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

となるから，$f(x)$ と $g(x)$ は $x=1$ で接する。以上より，$f(x)$ と $g(x)$ のグラフは下図のようになる。



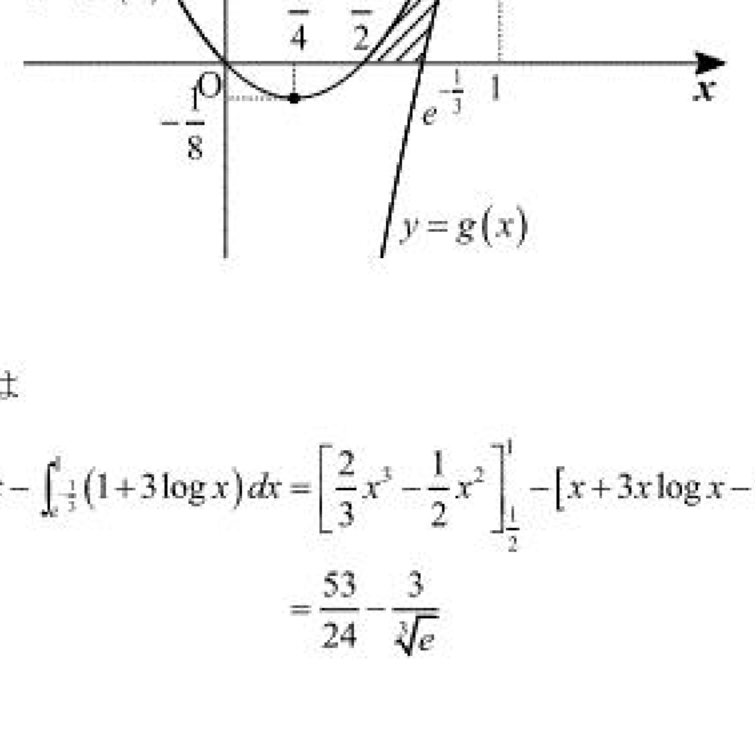
(答) 前図

(3)

連立不等式

$$\begin{cases}x>0\\0\leqq y\leqq 1\\g(x)\leqq y\leqq f(x)\end{cases}$$

を満たす領域は下図の斜線部である。



よって，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1(2x^2-x)dx-\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1(1+3\log x)dx&=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1-\left[x+3x\log x-3x\right]_{e^{-\frac{1}{3}}}^1\\&=\frac{53}{24}-\frac{3}{\sqrt[3]{e}}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{53}{24}-\frac{3}{\sqrt[3]{e}}$

(4)

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(2x^2-x)^2dx-\pi\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1(1+3\log x)^2dx\\&=\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(4x^4-4x^3+x^2)dx-\pi\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1\left\{1+6\log x+9(\log x)^2\right\}dx\end{aligned}$$

となる。ここで，$C,\ C'$ を積分定数として

$$\begin{aligned}\int\log x\,dx&=\int(x)'\log x\,dx\\&=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx\\&=x\log x-x+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int(\log x)^2dx&=\int(x)'(\log x)^2dx\\&=x(\log x)^2-\int 2\log x\,dx\\&=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C'\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(4x^4-4x^3+x^2)dx-\pi\int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1\left\{1+6\log x+9(\log x)^2\right\}dx\\&=\pi\left[\frac{4}{5}x^5-x^4+\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1-\pi\left[x+6(x\log x-x)+9\left\{x(\log x)^2-2x\log x+2x\right\}\right]_{e^{-\frac{1}{3}}}^1\\&=\left(\frac{18}{\sqrt[3]{e}}-\frac{3089}{240}\right)\pi\end{aligned}$$

である。

(答) $\left(\frac{18}{\sqrt[3]{e}}-\frac{3089}{240}\right)\pi$