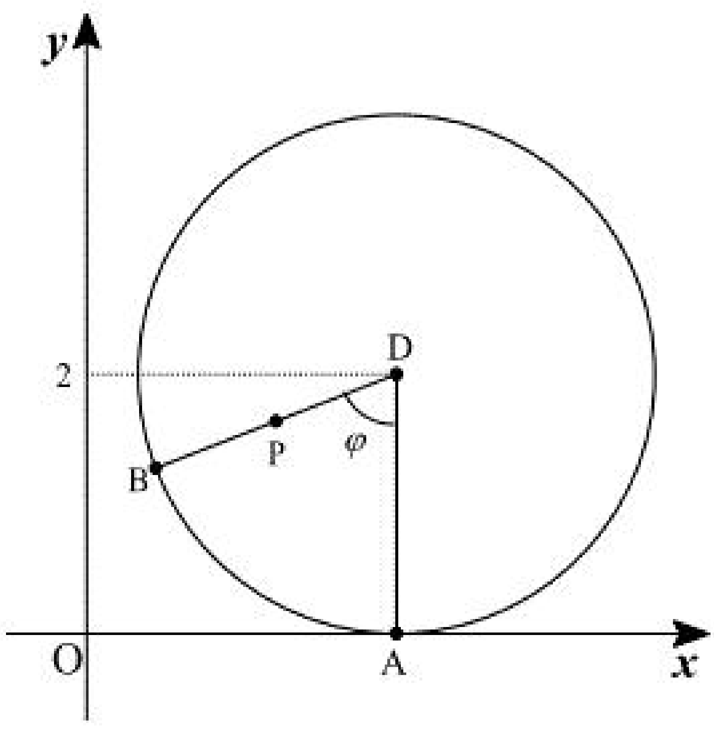
1

(1)

円板の中心を D，円板と x 軸の接点を A，半直線 DP と円板の円周の交点を B とする。円板が中心 D のまわりに回転した角を θ とするとき

$$\varphi=\theta-2n\pi,\ 0\leqq\varphi<2\pi$$

となるような適切な非負の整数 n は存在し，そのときの各点の位置関係は下図のようになる。



弧 AB の長さと線分 OA の長さが等しいことから

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}&=2\varphi+n\cdot4\pi\\&=2(\varphi+2n\pi)\\&=2\theta\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(2\theta,\ 2)$$

となり，DP = 1 より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DP}}&=(-\mathrm{DP}\cos\varphi,\ -\mathrm{DP}\sin\varphi)\\&=(-\cos\varphi,\ -\sin\varphi)\\&=(-\cos(\theta-2n\pi),\ -\sin(\theta-2n\pi))\\&=(-\cos\theta,\ -\sin\theta)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}\\&=(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)\end{aligned}$$

となる。以上より，P の座標は $(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ で与えられることが示された。

(2)

(1)の結果より，曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ は

$$\begin{cases}x=2\theta-\sin\theta\\ y=2-\cos\theta\end{cases}(0<\theta<2\pi)\qquad\cdots①$$

を満たす。この 2 式をそれぞれ θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta}=2-\cos\theta\qquad\cdots②$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

となるから，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ における接線の傾きは

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\\&=\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}\end{aligned}$$

となる。

[1] $\sin\theta=0$ のとき

θ の値は $\theta=\pi$ であり，点 P の座標は $(2\pi,\ 3)$ となる。このとき，曲線 C 上の点 P における接線の傾きは 0 となるから，点 P における曲線 C の法線は y 軸に平行な直線であり，この直線と x 軸との交点 Q の座標は $(2\pi,\ 0)$ となる。

[2] $\sin\theta\neq0$ のとき

点 P における曲線 C の法線の方程式は

$$y=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}+2-\cos\theta$$

となる。よって，この直線と x 軸との交点 Q の x 座標は，x についての方程式

$$0=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}+2-\cos\theta$$

の解であるから

$$\begin{aligned}&0=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}+2-\cos\theta\\&\Leftrightarrow(2-\cos\theta)x-(2-\cos\theta)(2\theta-\sin\theta)-(2-\cos\theta)\sin\theta=0\\&\Leftrightarrow(2-\cos\theta)(x-2\theta)=0\\&\Leftrightarrow x=2\theta\ (\because 2-\cos\theta>0)\end{aligned}$$

となり，点 Q の座標は $(2\theta,\ 0)$ となる。

以上, [1], [2] より，$0<\theta<2\pi$ における点 Q の座標は $(2\theta,\ 0)$ となる。このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\{2\theta-(2\theta-\sin\theta)\}^2+(2-\cos\theta)^2\\&=\sin^2\theta+4-4\cos\theta+\cos^2\theta\\&=5-4\cos\theta\end{aligned}$$

となり，$0<\theta<2\pi$ より $-1\leqq\cos\theta<1$ であることから，PQ^2 は $\cos\theta=-1$ つまり $\theta=\pi$ のとき最大値をとる。$\mathrm{PQ}>0$ であるから，PQ^2 が最大となるとき PQ も最大となるから，求める点 P の座標は $\theta=\pi$ のときの座標であり，$(2\pi,\ 3)$ である。

(答) $(2\pi,\ 3)$

(3)

求める体積を V とする。①より，$x,\ \theta$ は以下のように対応する。

x	0	→	4π
θ	0	→	2π

よって

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{4\pi}y^2dx\\&=\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos\theta)^2(2-\cos\theta)d\theta\quad(\because②)\\&=\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos\theta)^3d\theta\\&=\pi\int_0^{2\pi}(8-12\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta\\&=\pi\int_0^{2\pi}\left(8-12\cos\theta+6\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4}\right)d\theta\ (\because\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta)\\&=\pi\left[8\theta-12\sin\theta+3\theta+\frac{3}{2}\sin2\theta-\frac{1}{12}\sin3\theta-\frac{3}{4}\sin\theta\right]_0^{2\pi}\\&=22\pi^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $22\pi^2$

2

(1)

点 $\left(c,\ f(c)\right)$ における $f(x)$ の接線の方程式は

$$y=f'(c)(x-c)+f(c)$$

であるから

$$g(x)=f'(c)(x-c)+f(c)$$

となる。$G(x)=f(x)-g(x)$ とおくと

$$G(x)=f(x)-f'(c)(x-c)-f(c)$$
$$G'(x)=f'(x)-f'(c)$$
$$G''(x)=f''(x)$$

である。$f''(x)\geqq 0$ であるから，$G''(x)\geqq 0$ となり，$a<x<b$ において $G'(x)$ は単調増加関数である。よって

$a<x\leqq c$ のとき，$G'(x)\leqq G'(c)=0$

$c\leqq x<b$ のとき，$G'(x)\geqq G'(c)=0$

となり

$$\begin{aligned}G(c)&=f(c)-f'(c)(c-c)-f(c)\\&=0\end{aligned}$$

となるから，$G(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$G'(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$G(x)$		↘	0	↗	

以上より，$a\leqq x\leqq b$ において

$$G(x)\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow g(x)\leqq f(x)$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(d)\ (a<d<b)$$

を満たす実数 d が存在する。$\left(a,\ f(a)\right),\left(b,\ f(b)\right)$ の 2 点を通る直線の方程式は

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$
$$\Leftrightarrow y=f'(d)(x-a)+f(a)$$

であるから

$$h(x)=f'(d)(x-a)+f(a)$$

となる。$H(x)=h(x)-f(x)$ とおくと

$$H(x)=f'(d)(x-a)+f(a)-f(x)$$
$$H'(x)=f'(d)-f'(x)$$
$$H''(x)=-f''(x)$$

となる。$f''(x)\geqq 0$ であるから，$H''(x)\leqq 0$ となり，$a<x<b$ において $H'(x)$ は単調減少関数である。よって

$a<x\leqq d$ のとき，$H'(x)\geqq H'(d)=0$

$d\leqq x<b$ のとき，$H'(x)\leqq H'(d)=0$

となり

$$\begin{aligned}H(a)&=f'(d)(a-a)+f(a)-f(a)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(b)&=f'(d)(b-a)+f(a)-f(b)\\&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+f(a)-f(b)\\&=f(b)-f(a)+f(a)-f(b)\\&=0\end{aligned}$$

となるから，$H(x)$ の増減表は次のようになる。

x	a	$\cdots$	d	$\cdots$	b
$H'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$H(x)$	0	↗		↘	0

以上より，$a\leqq x\leqq b$ において

$$H(x)\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow f(x)\leqq h(x)$$

となることが示された。

(証明終)

(3)

(1), (2)の結果より，$a\leqq x\leqq b$ において

$$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$$

となるから

$$\int_a^b g(x)dx\leqq\int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b h(x)dx$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dx&=\int_a^b\left\{f'(c)(x-c)+f(c)\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{2}f'(c)x^2+\left(f(c)-cf'(c)\right)x\right]_a^b\\&=\frac{1}{2}f'(c)\left(b^2-a^2\right)+\left(f(c)-cf'(c)\right)(b-a)\\&=\frac{1}{2}(b-a)\left(f'(c)(a+b-2c)+2f(c)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b h(x)dx&=\int_a^b\left\{f'(d)(x-a)+f(a)\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{2}f'(d)x^2+\left(f(a)-af'(d)\right)x\right]_a^b\\&=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)f'(d)+\left(f(a)-af'(d)\right)(b-a)\\&=\frac{1}{2}(b-a)\left\{f'(d)(b-a)+2f(a)\right\}\\&=\frac{1}{2}(b-a)\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+2f(a)\right\}\\&=\frac{1}{2}(b-a)\left(f(b)-f(a)+2f(a)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)(b-a)\end{aligned}$$

となるから

$$\frac{1}{2}(b-a)\left(f'(c)(a+b-2c)+2f(c)\right)\leqq\int_a^b f(x)dx\leqq\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)(b-a)\quad\cdot\cdot\cdot①$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(4)

$f(x)=e^{-\cos x}$ とすると，$f(x)$ は閉区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ で連続，開区間 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ で 2 回微分可能であり

$$f'(x)=e^{-\cos x}\sin x$$
$$f''(x)=e^{-\cos x}\sin^2 x+e^{-\cos x}\cos x$$

となる。$0<x<\frac{\pi}{2}$ において $0<\cos x<1,\ 0<\sin x<1$ であり，$e^{-\cos x}>0$ であるから

$$f''(x)\geqq 0$$

が成り立つ。よって，$0<c<\frac{\pi}{2}$ である実数 c について①は成り立ち

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(f'(c)\left(\frac{\pi}{2}-2c\right)+2f(c)\right)\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos x}dx\leqq\frac{1}{2}\left(f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}\left(f'(c)\left(\frac{\pi}{2}-2c\right)+2f(c)\right)\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos x}dx\leqq\frac{\pi}{4}\left(e^{-1}+1\right)$$

となる。$c=\frac{\pi}{4}$ を代入すると

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+2e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos x}dx\leqq\frac{\pi}{4}\left(e^{-1}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos x}dx\leqq\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

3

サイコロをふったときの目の出方は同様に確からしいとする。

(1)

サイコロを1回ふったとき，どの目の数字が出ても条件を満たすから

$a_1=1$

である。n回目の試行まで条件が満たされている上で，$n+1$回目にサイコロをふったとき隣り合う2つの数が異なるのは，n回目に出た数と異なる数字が出たときであるから

$a_{n+1}=\frac{5}{6}a_n \quad (n \geqq 1)$

である。よって，数列$\{a_n\}$は初項1，公比$\frac{5}{6}$の等比数列となるから

$a_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

である。

(答) $a_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

(2)

サイコロをk回目$(k=1, 2, 3, \dots, n)$にふったときに出た目の数をX_kとする。サイコロを1回ふったとき，どの目の数字が出ても条件を満たすから

$b_1=1$

となり

$a_1=b_1$

である。$n=2$のときに条件を満たすのは，$X_1 \neq X_2$となる場合であるから

$b_2=\frac{5}{6}$

となり

$a_2=b_2$

である。$n \geqq 3$のとき，a_nは$k=1, 2, 3, \dots, n-1$であるすべてのkに対して$X_k \neq X_{k+1}$が成り立つ場合の確率である。$X_k \neq X_{k+1}$ $(k=1, 2, 3, \dots, n-1)$となる場合には以下の[1], [2]の場合が含まれる。

[1] $X_n \neq X_1$となる場合

数字を円周上に並べたとき，すべての隣り合う2つの数が異なるから，このようになる確率はb_nである。

[2] $X_n = X_1$となる場合

$X_n \neq X_{n-1}$であるから，$X_{n-1} \neq X_1$となる。さらに，$X_k \neq X_{k+1}$ $(k=1, 2, 3, \dots, n-2)$であるから，$n-1$回サイコロをふった段階では，出た目の数字を円周上に並べたときに，隣り合う2つの数はすべて異なる状態であったため，このときの確率はb_{n-1}である。そのうえで，サイコロをn回目にふったとき$X_n=X_1$となる確率は$\frac{1}{6}$である。よって，この場合の確率は$\frac{1}{6}b_{n-1}$となる。

以上，[1], [2]の場合は互いに排反であるから，$n \geqq 3$のとき

$a_n=b_n+\frac{1}{6}b_{n-1}$

となる。以上より，

$a_n=b_n+\frac{1}{6}b_{n-1} \quad (n \geqq 3),\quad a_n=b_n \quad (n=1, 2)$

である。

(答) $a_n=b_n+\frac{1}{6}b_{n-1} \quad (n \geqq 3),\quad a_n=b_n \quad (n=1, 2)$

(3)

$n \geqq 3$のとき

$$\begin{aligned}
&b_n+\frac{1}{6}b_{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad \left(\because a_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^n b_n+\frac{6^{n-1}}{5^n}b_{n-1}=\frac{6}{5}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^n b_n+\frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} b_{n-1}=\frac{6}{5}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$\left(\frac{6}{5}\right)^n b_n=c_n$

とおくと，$c_1=\frac{6}{5}, c_2=\frac{6}{5}$であるもとで

$$\begin{aligned}
&c_n+\frac{1}{5}c_{n-1}=\frac{6}{5}\\
&\Leftrightarrow c_n-1=-\frac{1}{5}(c_{n-1}-1)\\
&\Leftrightarrow c_n-1=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-2}(c_2-1)\\
&\Leftrightarrow c_n-1=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{5}\right)\\
&\Leftrightarrow c_n=1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
b_n&=\left(\frac{5}{6}\right)^n c_n\\
&=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}\\
&=\frac{5^n+5\cdot(-1)^n}{6^n}
\end{aligned}$$

である。これは$n=2$のときも$b_2=\frac{5}{6}$を満たすが，$n=1$のときは$b_1=1$を満たさない。以上より

$b_1=1, b_n=\frac{5^n+5\cdot(-1)^n}{6^n} \; (n \geqq 2)$

である。

(答) $b_1=1, b_n=\frac{5^n+5\cdot(-1)^n}{6^n} \; (n \geqq 2)$

4

(1)

(i)

$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$とおく。

$$X^2=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x^2+yz & y(x+w) \\ z(x+w) & yz+w^2 \end{pmatrix}$$

となる。$X^2=A$を満たすとき

$$\begin{cases} x^2+yz=a & \cdots ① \\ y(x+w)=b & \cdots ② \\ z(x+w)=0 & \cdots ③ \\ yz+w^2=d & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ。③より

$$z(x+w)=0$$
$$\Leftrightarrow z=0 \text{ または } x+w=0$$

となる。以下，$z=0$の場合を考える。このとき，①, ④はそれぞれ

$$x^2=a,\ w^2=d$$

となる。$a>0,\ d\geqq 0$または$a\geqq 0,\ d>0$であるから

$$x=\sqrt{a},\ w=\sqrt{d}$$

はいずれも実数である。このとき，$x+w>0$となるから，②より

$$y=\frac{b}{x+w}$$
$$=\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{d}}$$

となる。以上より，$X^2=A$を満たす行列Xの1つとして

$$X=\begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{d}} \\ 0 & \sqrt{d} \end{pmatrix}$$

が挙げられる。

(答) $X=\begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{d}} \\ 0 & \sqrt{d} \end{pmatrix}$

(ii)

$a<0$または$d<0$のとき，$X^2=A$を満たす行列Xが存在するための必要十分条件は，①, ②, ③, ④を満たす実数(x, y, z, w)の組が存在することである。

[1] ①, ②, ③, ④を満たす実数(x, y, z, w)の組が存在するとき

③より

$$z=0 \text{ または } x+w=0$$

である。$z=0$であるとすると，①, ④より

$$a=x^2\geqq 0$$
$$d=w^2\geqq 0$$

となるから，$a<0$または$d<0$であることに反する。よって，$z\neq 0$となる。これより，$x+w=0$となり，②より

$$y\cdot 0=b$$
$$\Leftrightarrow b=0$$

となる。また，$x+w=0$, ①, ④より

$$a=x^2+yz$$
$$d=yz+w^2$$
$$=yz+(-x)^2$$
$$=x^2+yz$$

となり，$a=d$となる。

[2] 逆に，$a=d,\ b=0$のとき

$a<0$または$d<0$であるから，$a=d<0$であることに注意して

$$(x, y, z, w)=(1, a-1, 1, -1)$$

は①, ②, ③, ④を満たす。

以上より，$a<0$または$d<0$のとき，$X^2=A$を満たす行列Xが存在するための必要十分条件は，

$$a=d,\ b=0$$

であり，このとき，行列Xの1つとして

$$X=\begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が挙げられる。

(答) $a=d,\ b=0,\ X=\begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$y(x+w)=b(\neq 0) \quad \cdots ⑥$$
$$z(x+w)=0 \quad \cdots ⑦$$
$$yz+w^2=0 \quad \cdots ⑧$$

が成り立つ。⑥より

$$y\neq 0 \text{ かつ } x+w\neq 0$$

となり，⑦より$z=0$となる。このとき，⑤, ⑧より

$$x^2=0\Leftrightarrow x=0$$
$$w^2=0\Leftrightarrow w=0$$

となるが，これは$x+w\neq 0$に反するから仮定は誤りである。よって，$a=d=0,\ b\neq 0$のとき$X^2=A$を満たす行列Xは存在しないことが示された。

(証明終)

(2)

(i)

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$B^2-(p+s)B+(ps-qr)E=O$$
$$\Leftrightarrow -(p+s)B+(ps-qr)E=O\ (\because B^2=O)$$
$$\Leftrightarrow (p+s)B=(ps-qr)E \quad \cdots ⑨$$

となる。ここで，$p+s\neq 0$であると仮定すると

$$B=\frac{ps-qr}{p+s}E$$

と表すことができる。これより

$$B^2=\left(\frac{ps-qr}{p+s}\right)^2E^2$$

となり，$B^2=O$であるから

$$\left(\frac{ps-qr}{p+s}\right)^2E^2=O$$

となるが，$E^2\neq O$であるから

$$\left(\frac{ps-qr}{p+s}\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow ps-qr=0$$

となる。このとき，⑨より$B=O$となり，$p=s=0$となるから，$p+s\neq 0$であるという仮定に反する。よって，$p+s=0$である。さらに，⑨より

$$0\cdot B=(ps-qr)E$$
$$\Leftrightarrow ps-qr=0\ (\because E\neq O)$$

となる。以上より，$p+s=0,\ ps-qr=0$となることは示された。

(証明終)

(ii)

$B\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$のとき，$X^2=B$を満たす行列$X$が存在すると仮定する。そのような行列$X$を

$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$とおくと

$$\begin{cases} x^2+yz=p \\ y(x+w)=q \\ z(x+w)=r \\ yz+w^2=s \end{cases}$$

が成り立つ。(i)の結果より

$$\begin{cases} p+s=0 \\ ps-qr=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+yz)+(yz+w^2)=0 & \cdots ⑩ \\ (x^2+yz)(yz+w^2)-yz(x+w)^2=0 & \cdots ⑪ \end{cases}$$

である。⑪より

$$(x^2+yz)(yz+w^2)-yz(x+w)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2w^2+yz(x^2+w^2)+y^2z^2-yz(x^2+2xw+w^2)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2w^2-2xyzw+y^2z^2=0$$
$$\Leftrightarrow (xw-yz)^2=0$$
$$\Leftrightarrow xw-yz=0$$
$$\Leftrightarrow xw=yz$$

となり，このとき⑩より

$$x^2+2xw+w^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+w)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x+w=0$$

である。ケーリー・ハミルトンの定理より

$$X^2-(x+w)X+(xw-yz)E=O$$

であるから，$xw=yz,\ x+w=0$より

$$X^2=O$$
$$\Leftrightarrow B=O\ (\because X^2=B)$$

となるが，これは$B\neq O$であることに反する。よって，$B^2\neq O$のとき，$X^2=B$を満たす行列Xは存在しないことが示された。

(証明終)