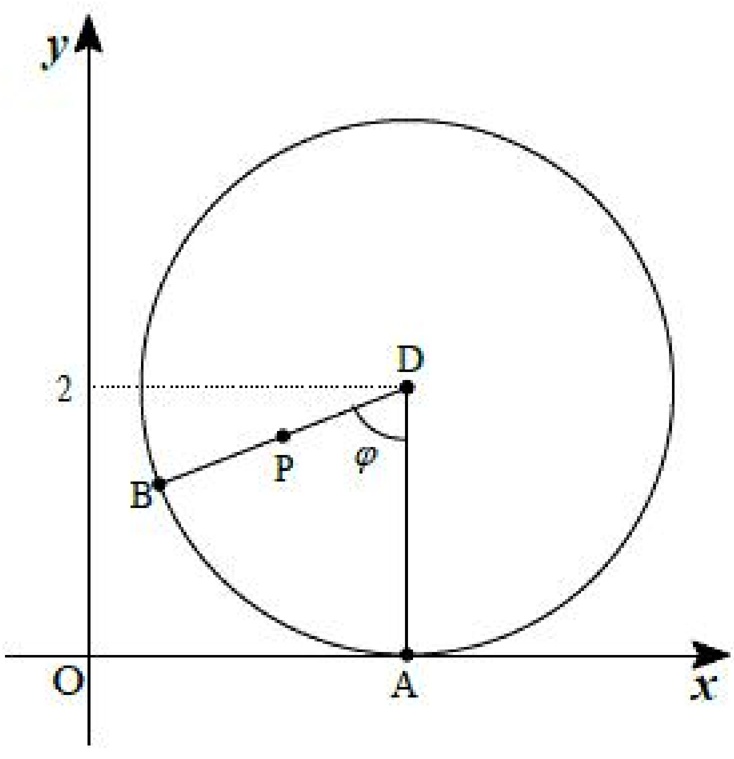
1

(1)

円板の中心をD，円板と x 軸の接点をA，半直線DPと円板の円周の交点をBとする。円板が中心Dのまわりに回転した角を θ とするとき

$$\varphi=\theta-2n\pi,\ 0\leqq\varphi<2\pi$$

となるような適切な非負の整数 n は存在し，そのときの各点の位置関係は下図のようになる。



弧ABの長さと線分OAの長さが等しいことから

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}&=2\varphi+n\cdot4\pi\\&=2(\varphi+2n\pi)\\&=2\theta\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(2\theta,\ 2)$$

となり，$\mathrm{DP}=1$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DP}}&=(-\mathrm{DP}\cos\varphi,\ -\mathrm{DP}\sin\varphi)\\&=(-\cos\varphi,\ -\sin\varphi)\\&=(-\cos(\theta-2n\pi),\ -\sin(\theta-2n\pi))\\&=(-\cos\theta,\ -\sin\theta)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}\\&=(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)\end{aligned}$$

となる。以上より，Pの座標は $(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ で与えられることが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より，曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ は

$$\begin{cases}x=2\theta-\sin\theta\\y=2-\cos\theta\end{cases}(0<\theta<2\pi)\qquad\cdots①$$

を満たす。この2式をそれぞれ θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta}=2-\cos\theta\qquad\cdots②$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

となるから，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ における接線の傾きは

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\\&=\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}\end{aligned}$$

となる。

[1] $\sin\theta=0$ のとき

θ の値は $\theta=\pi$ であり，点Pの座標は $(2\pi,\ 3)$ となる。このとき，曲線 C 上の点Pにおける接線の傾きは0となるから，点Pにおける曲線 C の法線は y 軸に平行な直線であり，この直線と x 軸との交点Qの座標は $(2\pi,\ 0)$ となる。

[2] $\sin\theta\neq0$ のとき

点Pにおける曲線 C の法線の方程式は

$$y=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}+2-\cos\theta$$

となる。よって，この直線と x 軸との交点Qの x 座標は，x についての方程式

$$0=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}+2-\cos\theta$$

の解であるから

$$\begin{aligned}&0=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}+2-\cos\theta\\&\Leftrightarrow(2-\cos\theta)x-(2-\cos\theta)(2\theta-\sin\theta)-(2-\cos\theta)\sin\theta=0\\&\Leftrightarrow(2-\cos\theta)(x-2\theta)=0\\&\Leftrightarrow x=2\theta\ (\because 2-\cos\theta>0)\end{aligned}$$

となり，点Qの座標は $(2\theta,\ 0)$ となる。

以上，[1], [2]より，$0<\theta<2\pi$ における点Qの座標は $(2\theta,\ 0)$ となる。このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\{2\theta-(2\theta-\sin\theta)\}^2+(2-\cos\theta)^2\\&=\sin^2\theta+4-4\cos\theta+\cos^2\theta\\&=5-4\cos\theta\end{aligned}$$

となり，$0<\theta<2\pi$ より $-1\leqq\cos\theta<1$ であることから，PQ^2 は $\cos\theta=-1$ つまり $\theta=\pi$ のとき最大値をとる。$\mathrm{PQ}>0$ であるから，PQ^2 が最大となるときPQも最大となるから，求める点Pの座標は $\theta=\pi$ のときの座標であり，$(2\pi,\ 3)$ である。

(答) $(2\pi,\ 3)$

(3)

求める体積を V とする。①より，$x,\ \theta$ は以下のように対応する。

x	0	$\to$	4π
θ	0	$\to$	2π

よって

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{4\pi}y^2dx\\&=\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos\theta)^2(2-\cos\theta)d\theta\quad(\because②)\\&=\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos\theta)^3d\theta\\&=\pi\int_0^{2\pi}(8-12\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta\\&=\pi\int_0^{2\pi}\left(8-12\cos\theta+6\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4}\right)d\theta\ (\because\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta)\\&=\pi\left[8\theta-12\sin\theta+3\theta+\frac{3}{2}\sin2\theta-\frac{1}{12}\sin3\theta-\frac{3}{4}\sin\theta\right]_0^{2\pi}\\&=22\pi^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $22\pi^2$

$\boxed{2}$

(1)

点 $(c,\ f(c))$ における $f(x)$ の接線の方程式は

$$y=f'(c)(x-c)+f(c)$$

であるから

$$g(x)=f'(c)(x-c)+f(c)$$

となる。$G(x)=f(x)-g(x)$ とおくと

$$G(x)=f(x)-f'(c)(x-c)-f(c)$$
$$G'(x)=f'(x)-f'(c)$$
$$G''(x)=f''(x)$$

である。$f''(x)\geqq 0$ であるから，$G''(x)\geqq 0$ となり，$a<x<b$ において $G'(x)$ は単調増加関数である。よって

$a<x\leqq c$ のとき，$G'(x)\leqq G'(c)=0$

$c\leqq x<b$ のとき，$G'(x)\geqq G'(c)=0$

となり

$$G(c)=f(c)-f'(c)(c-c)-f(c)$$
$$=0$$

となるから，$G(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$G'(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$G(x)$		↘	0	↗	

以上より，$a\leqq x\leqq b$ において

$$G(x)\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow g(x)\leqq f(x)$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(d)\ (a<d<b)$$

を満たす実数 d が存在する。$(a,\ f(a)),\ (b,\ f(b))$ の 2 点を通る直線の方程式は

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$
$$\Leftrightarrow y=f'(d)(x-a)+f(a)$$

であるから

$$h(x)=f'(d)(x-a)+f(a)$$

となる。$H(x)=h(x)-f(x)$ とおくと

$$H(x)=f'(d)(x-a)+f(a)-f(x)$$
$$H'(x)=f'(d)-f'(x)$$
$$H''(x)=-f''(x)$$

となる。$f''(x)\geqq 0$ であるから，$H''(x)\leqq 0$ となり，$a<x<b$ において $H'(x)$ は単調減少関数である。よって

$a<x\leqq d$ のとき，$H'(x)\geqq H'(d)=0$

$d\leqq x<b$ のとき，$H'(x)\leqq H'(d)=0$

となり

$$H(a)=f'(d)(a-a)+f(a)-f(a)$$
$$=0$$

$$H(b)=f'(d)(b-a)+f(a)-f(b)$$
$$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+f(a)-f(b)$$
$$=f(b)-f(a)+f(a)-f(b)$$
$$=0$$

となるから，$H(x)$ の増減表は次のようになる。

x	a	$\cdots$	d	$\cdots$	b
$H'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$H(x)$	0	↗		↘	0

以上より，$a\leqq x\leqq b$ において

$$H(x)\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow f(x)\leqq h(x)$$

となることが示された。

(証明終)

(3)

(1), (2)の結果より，$a\leqq x\leqq b$ において

$$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$$

となるから

$$\int_a^b g(x)dx\leqq\int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b h(x)dx$$

が成り立つ。ここで

$$\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f'(c)(x-c)+f(c)\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}f'(c)x^2+(f(c)-cf'(c))x\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{2}f'(c)(b^2-a^2)+(f(c)-cf'(c))(b-a)$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)(f'(c)(a+b-2c)+2f(c))$$

$$\int_a^b h(x)dx=\int_a^b\{f'(d)(x-a)+f(a)\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}f'(d)x^2+(f(a)-af'(d))x\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)f'(d)+(f(a)-af'(d))(b-a)$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)\{f'(d)(b-a)+2f(a)\}$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+2f(a)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a)+2f(a))$$
$$=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)$$

となるから

$$\frac{1}{2}(b-a)(f'(c)(a+b-2c)+2f(c))\leqq\int_a^b f(x)dx\leqq\frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)\qquad\cdots ①$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(4)

$f(x)=e^{-\cos x}$ とすると，$f(x)$ は閉区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ で連続，開区間 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ で 2 回微分可能であり

$$f'(x)=e^{-\cos x}\sin x$$
$$f''(x)=e^{-\cos x}\sin^2 x+e^{-\cos x}\cos x$$

となる。$0<x<\frac{\pi}{2}$ において $0<\cos x<1,\ 0<\sin x<1$ であり，$e^{-\cos x}>0$ であるから

$$f''(x)\geqq 0$$

が成り立つ。よって，$0<c<\frac{\pi}{2}$ である実数 c について①は成り立ち

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(f'(c)\left(\frac{\pi}{2}-2c\right)+2f(c)\right)\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos x}dx\leqq\frac{1}{2}\left(f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}\left(f'(c)\left(\frac{\pi}{2}-2c\right)+2f(c)\right)\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos x}dx\leqq\frac{\pi}{4}(e^{-1}+1)$$

となる。$c=\frac{\pi}{4}$ を代入すると

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+2e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos x}dx\leqq\frac{\pi}{4}(e^{-1}+1)$$
$$\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos x}dx\leqq\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

が成り立つことが示された。

(証明終)