

1

3枚のカードに、1, 2, 3の各数字が書かれている。この3枚のカードから1枚引き、そこに書いてある数字を記録してカードを戻す、という作業を n 回繰り返す。ただし、何回目の作業であっても、どのカードを引く確率も等しいとする。一度も引かなかったカードがあった場合に限り、 n 回引いて得た数字のうち一番大きいものを得点として獲得するものとする。

例えば $n=5$ のとき、引いた数字が順に2, 2, 3, 3, 2であれば3点を獲得し、2, 1, 2, 2, 3であれば得点は獲得しない。

以下の問いに答えよ。

(1)

1点を獲得する確率を求めよ。

(2)

2点を獲得する確率を求めよ。

(3)

3点を獲得する確率を求めよ。

(4)

獲得する得点の期待値が最大になるような作業の回数 n の値を全て求め、そのときの期待値を求めよ。

2

l_1, l_2, l_3 を座標空間の原点 O を始点とする 3 つの相異なる半直線とする。 l_1 と l_2 及び l_1 と l_3 が

O においてなす角は $\frac{\pi}{3}$ であるとし、 l_2 と l_3 が O においてなす角を θ ($0 < \theta \leq \frac{2\pi}{3}$) とする。

x, y を正数とし、 l_1, l_2, l_3 上に点 P_1, P_2, P_3 をそれぞれ、 $OP_1 = 1, OP_2 = x, OP_3 = y$ となるようにとる。 $\triangle P_1P_2P_3$ が正三角形となる x, y が存在するような $\cos \theta$ の範囲を求めよ。

3

(1)

放物線 $C: y = x^2 + 6$, 直線 $l: y = 2x$ を考える。点 P が C 上を, 点 Q が l 上をそれぞれ動くとき, PQ の最小値を求めよ。

(2)

(1)で, PQ が最小値をとる C 上の点 P , l 上の点 Q に対し, 線分 PQ , 放物線 C , 直線 l , 及び y 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

(3)

放物線 $C: y = x^2 + 6$, 直線 $l_k: y = 2kx - 5$ を考える。点 P が C 上を, 点 R が l_k 上をそれぞれ動いたときの PR の最小値が 1 となる k の値を求めよ。