$\boxed{\mathbf{1}}$

3枚のカードに，1, 2, 3の各数字が書かれている。この3枚のカードから1枚引き，そこに書いてある数字を記録してカードを戻す，という作業を n 回繰り返す。ただし，何回目の作業であっても，どのカードを引く確率も等しいとする。一度も引かなかったカードがあった場合に限り，n 回引いて得た数字のうち一番大きいものを得点として獲得するものとする。

例えば $n=5$ のとき，引いた数字が順に 2, 2, 3, 3, 2 であれば3点を獲得し，2, 1, 2, 2, 3 であれば得点は獲得しない。

以下の問いに答えよ。

(1)

1点を獲得する確率を求めよ。

(2)

2点を獲得する確率を求めよ。

(3)

3点を獲得する確率を求めよ。

(4)

獲得する得点の期待値が最大になるような作業の回数 n の値を全て求め，そのときの期待値を求めよ。

$\boxed{\textbf{2}}$

l_1, l_2, l_3 を座標空間の原点Oを始点とする3つの相異なる半直線とする。l_1 と l_2 及び l_1 と l_3 がOにおいてなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるとし，l_2 と l_3 がOにおいてなす角を θ $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}\right)$ とする。Oとは相異なる l_1, l_2, l_3 上の3点 P_1, P_2, P_3 を頂点とする正三角形が存在するような $\cos\theta$ の範囲を求めよ。

$\boxed{\textbf{3}}$

(1)

$x>0$ で

$$f\left(x\right)+\int_1^x \frac{f\left(t\right)}{t}dt=3x^2-2x$$

を満たす多項式 $f\left(x\right)$ を求めよ。

(2)

$x>0$ で(1)で求めた $f\left(x\right)$ と $g\left(x\right)=1+3\log x$ を考える。このとき関数 $f\left(x\right)$ と $g\left(x\right)$ のグラフをかけ。

(3)

連立方程式

$$\begin{cases} x>0 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ g\left(x\right) \leqq y \leqq f\left(x\right) \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ。

(4)

(3)で求めた領域を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。