1

半径 2 の円板が x 軸上の正の方向に滑らずに回転するとき，円板上の点 P の描く曲線 C を考える。円板の中心の最初の位置を $(0,\ 2)$，点 P の最初の位置を $(0,\ 1)$ とする。

(1)

円板がその中心のまわりに回転した角を θ とするとき，P の座標は

$$\left(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta\right)$$

で与えられることを示せ。

(2)

点 $\mathrm{P}\left(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta\right)\ \left(0<\theta<2\pi\right)$ における曲線 C の法線と x 軸との交点を Q とする。線分 PQ の長さが最大となるような点 P を求めよ。ここで，P において接線に直交する直線を法線という。

(3)

曲線 C と x 軸，2 直線 $x=0,\ x=4\pi$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$

$a,\ b$ を実数とし，$a<b$ とする。関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で少なくとも 2 回まで微分可能で，$f''(x) \geqq 0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)

$a<c<b$ とする。$y=g(x)$ を点 $(c,\ f(c))$ における $f(x)$ の接線とする。$a \leqq x \leqq b$ のとき $g(x) \leqq f(x)$ を示せ。

(2)

$y=h(x)$ を，$(a,\ f(a)),\ (b,\ f(b))$ の 2 点を通る直線とする。$a \leqq x \leqq b$ のとき $f(x) \leqq h(x)$ を示せ。

(3)

$a<c<b$ とする。

$$\frac{1}{2}(b-a)\left(f'(c)(a+b-2c)+2f(c)\right) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)(b-a)$$

を示せ。

(4)

$$\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos x}dx \leqq \frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

を示せ。

$\boxed{3}$

(1)

サイコロを n 回ふって出た目の数字を1列に並べる。隣り合う 2 つの数がすべて異なる確率 a_n を求めよ。

(2)

サイコロを n 回ふって出た目の数字を円周上に並べる。隣り合う 2 つの数がすべて異なる確率を b_n とする。(1)の確率 a_n を b_n と b_{n-1} を用いて表せ。

(3)

(2)の確率 b_n を求めよ。

4

以下では，実数を成分にもつ行列を考える。

(1)

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ とする。

(i)

$a>0,\ d \geqq 0$ または $a \geqq 0,\ d>0$ のとき，$X^2=A$ を満たす行列 X を1つ求めよ。

(ii)

$a<0$ または $d<0$ のとき，$X^2=A$ を満たす行列 X が存在するための必要十分条件を $a,\ b,\ d$ を用いて表せ。また，この条件が成り立つとき，$X^2=A$ を満たす行列 X を1つ求めよ。

(iii)

$a=d=0,\ b \neq 0$ のとき，$X^2=A$ を満たす行列 X は存在しないことを示せ。

(2)

$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(i)

$p+s=0,\ ps-qr=0$ となることを示せ。

(ii)

$B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$X^2=B$ を満たす行列 X は存在しないことを示せ。