

(1)

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ から $0 < \sin \alpha < 1$ である。そこで $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ の両辺を $\sin^2 \alpha$ で割って整理する

ことで

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\because 0 < \sin \alpha < 1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(2)

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \gamma} \\ &= \frac{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} + 8}{1 - 8 \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。ここで $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ であるから $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi$ である。また $\tan \alpha > 1$ より

$\alpha > \frac{\pi}{4}$ であるから $\frac{\pi}{4} < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi$ となる。以上のことより

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{4}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1, \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{4}\pi$$

(3)

まず、 $\tan x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加関数であるから、 $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 5, \tan \gamma = 8$ より

$$(0 <) \alpha < \beta < \gamma \left(< \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore 0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma - \beta < \frac{\pi}{2}$$

である。一方,

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3}{11} \\ \tan(\gamma - \beta) &= \frac{\tan \gamma - \tan \beta}{1 + \tan \gamma \tan \beta} = \frac{3}{41} \\ \therefore \tan(\beta - \alpha) &> \tan(\gamma - \beta) \end{aligned}$$

であり、また $\tan x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加関数であることから

$$\beta - \alpha > \gamma - \beta$$

となることがわかる。

(証明終)

(4)

(2), (3)より

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &> \gamma - \beta \\ \Leftrightarrow 2\beta &> \alpha + \gamma \\ \Leftrightarrow 3\beta &> \alpha + \beta + \gamma \\ \Leftrightarrow \beta &> \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{5}{4}\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(1)

円 C の方程式を整理すると

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 &= 1\end{aligned}$$

となるから、円 C は半径 1、中心 $(5, 5)$ の円である。原点を通る直線は $x=0$, $y=mx$ と表されるが、直線 $x=0$ は明らかに円 C と接しない。直線 $y=mx$ が円 C と接するとき、直線 $y=mx$ と点 $(5, 5)$ の距離が 1 であるから、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned}\frac{|5m-5|}{\sqrt{m^2+1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow (5m-5)^2 &= m^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 12m^2 - 25m + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3m-4)(4m-3) &= 0 \\ \therefore m &= \frac{4}{3}, \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。大きい傾きのほうが直線 l の傾きであるので求める値は $m = \frac{4}{3}$ である。

(答) $\frac{4}{3}$

(2)

題意の円を D 、中心を (p, q) とおく。円 D は x 軸に接しているから、その半径は q である。また円 C と D は外接しているから、点 $(5, 5)$ と点 (p, q) の距離は $q+1$ である。よって

$$\begin{aligned}(p-5)^2 + (q-5)^2 &= (q+1)^2 \\ \Leftrightarrow q &= \frac{p^2}{12} - \frac{5}{6}p + \frac{49}{12}\end{aligned}$$

となる。よって求める軌跡は放物線 $y = \frac{x^2}{12} - \frac{5}{6}x + \frac{49}{12}$ である。

(答) 放物線 $y = \frac{x^2}{12} - \frac{5}{6}x + \frac{49}{12}$

(3)

まず、 x 軸に接する円の方程式は、その中心を (p, q) として

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = q^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また、(2)の結果より、この円が円 C に外接するための条件は

$$q = \frac{p^2}{12} - \frac{5}{6}p + \frac{49}{12} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。さらに、(1)より直線 ℓ の方程式は

$$\frac{4}{3}x - y = 0$$

であり、直線 ℓ と円①が接するための条件は点 (p, q) と直線 ℓ の距離が円①の半径 q と等しくなることであるから、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned}\frac{\left|\frac{4}{3}p - q\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1^2}} &= q \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}p - q\right)^2 &= \frac{25}{9}q^2 \\ \Leftrightarrow \frac{16}{9}q^2 + \frac{8}{3}pq - \frac{16}{9}p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2q-p)(q+2p) &= 0 \\ \therefore q &= -2p, \frac{1}{2}p\end{aligned}$$

となる。これらを②式に代入して解くと、

[1] $q = -2p$ のとき

$$\begin{aligned}-2p &= \frac{p^2}{12} - \frac{5}{6}p + \frac{49}{12} \\ \Leftrightarrow (p+7)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -7\end{aligned}$$

[2] $q = \frac{1}{2}p$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p &= \frac{p^2}{12} - \frac{5}{6}p + \frac{49}{12} \\ \Leftrightarrow p^2 - 16p + 49 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= 8 \pm \sqrt{15}\end{aligned}$$

である。よって求める半径の値は

$$q = 14, 4 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

である。

(答) $14, 4 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$

(1)

$$a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 2a_n \qquad \cdots \textcircled{1}$$

を数学的帰納法で示す。 $n=1$ のとき仮定より①式は明らかに成り立つ。また $a_4=1+1=2$ であるから、 $n=2$ の時も①式は成り立つ。任意の自然数 n について、 $n \leq k (k \geq 2)$ の時①式が成り立つと仮定すると、与式より

$$\begin{aligned} a_{k+3}-a_{k+2} &= a_{k+1}+a_k-(a_k+a_{k-1}) \\ &= a_{k+1}-a_{k-1} \end{aligned}$$

である。ここで $a_{k+1} \geq a_k \geq a_{k-1}$ より $a_{k+1} \geq a_{k-1}$ が成り立つので $a_{k+3} \geq a_{k+2}$ となる。また

$$2a_{k+1}-a_{k+3}=a_{k+1}-a_k$$

であるが $a_{k+1} \geq a_k$ より $2a_{k+1} \geq a_{k+3}$ となる。よって $n=k+1$ でも①式は成り立つから、①式は示された。

(証明終)

(2)

$$a_n \leq \sqrt{2^n} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

を数学的帰納法で示す。仮定より $n=1, 2, 3$ について明らかに②は成り立つ。このとき $n \leq k (k \geq 3)$ の時②式が成り立つと仮定すると、与式より

$$a_{k+1}=a_{k-1}+a_{k-2} \leq \sqrt{2^{k-1}}+\sqrt{2^{k-2}}=(\sqrt{2}+1)\sqrt{2^{k-2}} \leq 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^{k-2}}=\sqrt{2^{k+1}}$$

となる。よって $n=k+1$ でも②は成り立つから、②式が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

与式 $a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$ より、 a_{n+3} の偶奇は a_n, a_{n+1} の偶奇によって決定される。 $\cdots \textcircled{3}$

ここで数列 $\{b_n\}$ の項を1から順に並べていくと

$$1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0 \cdots$$

となり $1, 1, 1, 0, 0, 1, 0$ の繰り返しとなる。これは単なる予想ではなく③によって保証されている。よって求める値は $k=7$ となる。

(答) $k=7$

(4)

与式 $a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$ から、ある自然数 m について $b_1=b_m, b_2=b_{m+1}, b_3=b_{m+2}$ となれば p_k を満たす k は存在する。ここで b_1, b_2, b_3 の組み合わせと、 b_4 以降の項を並べたものを以下に示す。

b_1, b_2, b_3	b_4 以降の項
0, 0, 0	<u>000</u> $\cdots$
0, 0, 1	0111 <u>001</u> $\cdots$
0, 1, 0	1110 <u>010</u> $\cdots$
0, 1, 1	1001 <u>011</u> $\cdots$
1, 0, 0	1011 <u>100</u> $\cdots$
1, 0, 1	1100 <u>101</u> $\cdots$
1, 1, 0	0101 <u>110</u> $\cdots$
1, 1, 1	0010 <u>111</u> $\cdots$

この表より、題意は示された。

(証明終)