## 1

(1)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=-\frac{7}{9}$$

である。$\tan(\alpha+\beta)<0$ と $0<\alpha,\ \beta<\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ であるので，

$\cos(\alpha+\beta)<0,\ \sin(\alpha+\beta)>0$ である。よって

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha+\beta)}}$$
$$=-\frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\tan(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{\sqrt{130}}$$

となる。

(答) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{\sqrt{130}},\ \cos(\alpha+\beta)=-\frac{9}{\sqrt{130}}$

(2)

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\alpha+\beta\leqq\alpha+\beta+x\leqq\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}$ である。(1)より $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta,\ \alpha+\beta+\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$

である。ここで

$$\tan(\alpha+\beta)=-\frac{7}{9},$$

$$\tan\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{9}{7}$$

となるが，$\tan\theta$ は $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ の範囲で単調増加であるから，

$$-\frac{7}{9}\leqq\tan(\alpha+\beta+x)\leqq\frac{9}{7}$$

となる。

(答) $-\frac{7}{9}\leqq\tan(\alpha+\beta+x)\leqq\frac{9}{7}$

(3)

$$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}+x\right)$$

である。$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\leqq\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}+x\leqq\alpha+\beta+\frac{3}{4}\pi$ である。

$$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi,\ \tan(\alpha+\beta)=-\frac{7}{9}>-1=\tan\frac{3}{4}\pi$$
$$\therefore\frac{3}{4}\pi<a+\beta<\pi$$

となるから，

$$\pi<a+\beta+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{4}\pi$$

である。また

$$\frac{3}{2}\pi<\alpha+\beta+\frac{3}{4}\pi<\frac{7}{4}\pi$$

であるから，$f(x)$ は $\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}+x=\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}$ つまり $x=0$ で最大値

$$f(0)=\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2}{\sqrt{130}}$$

を取り，$\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}+x=\frac{3}{2}\pi$ つまり $x=\frac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)$ のとき最小値

$$f\left(\frac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)\right)=\sqrt{2}\sin\frac{3}{2}\pi=-\sqrt{2}$$

を取る。

(答) 最大値 $-\frac{2}{\sqrt{130}}\ (x=0)$，最小値 $-\sqrt{2}\left(x=\frac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)\right)$

(4)

(3)より $\gamma=\frac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)$ であるから，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi$$

である。また

$$\tan\gamma=\tan\left\{\frac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)\right\}$$
$$=\frac{\tan\frac{5}{4}\pi-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan\frac{5}{4}\pi\tan(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{\frac{16}{9}}{\frac{2}{9}}$$
$$=8$$

となる。また，$0<\alpha,\ \beta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi<\alpha+\beta<\pi$ であることから

$$-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{4}<\gamma-\beta\left(=\frac{5}{4}\pi-\alpha-2\beta\right)<\gamma\left(=\frac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)\right)<\frac{\pi}{2}$$

であり，$\tan x$ は $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加関数である。一方，

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{5-2}{1+5\cdot2}=\frac{3}{11}$$
$$\tan(\gamma-\beta)=\frac{8-5}{1+8\cdot5}=\frac{3}{41}$$

であることから，$\tan(\beta-\alpha)>\tan(\gamma-\beta)$ より $\beta-\alpha>\gamma-\beta$ を得る。

(証明終)

(答) $\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi,\ \tan\gamma=8$

(5)

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi$，$\beta-\alpha>\gamma-\beta$ より

$$\beta-\alpha>\gamma-\beta$$
$$\Leftrightarrow 3\beta>\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi$$
$$\Leftrightarrow \beta>\frac{5}{12}\pi$$

となる。

(証明終)

$\boxed{2}$

(1)

円 $C$ の方程式を整理すると

$$x^2+y^2-10x-10y+49=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-5)^2=1$$

となるから，円 $C$ は半径1，中心 $(5,5)$ の円である。原点を通る直線は $x=0,\ y=mx$ と表されるが，直線 $x=0$ は明らかに円 $C$ と接しない。直線 $y=mx$ が円 $C$ と接するとき，直線 $y=mx$ と点 $(5,5)$ の距離が1であるから，点と直線の距離の公式より

$$\frac{|5m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$
$$\Leftrightarrow (5m-5)^2=m^2+1$$
$$\Leftrightarrow 12m^2-25m+12=0$$
$$\Leftrightarrow (3m-4)(4m-3)=0$$
$$\therefore m=\frac{4}{3},\ \frac{3}{4}$$

となる。大きい傾きのほうが直線 $l$ の傾きであるので求める値は $m=\dfrac{4}{3}$ である。

(答) $\dfrac{4}{3}$

(2)

題意の円を $D$，中心を $(p,q)$ とおく。円 $D$ は $x$ 軸に接しているから，その半径は $q$ である。また円 $C$ と $D$ は外接しているから，点 $(5,5)$ と点 $(p,q)$ の距離は $q+1$ である。よって

$$(p-5)^2+(q-5)^2=(q+1)^2$$
$$\Leftrightarrow q=\frac{p^2}{12}-\frac{5}{6}p+\frac{49}{12}$$

となる。よって求める軌跡は放物線 $y=\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{49}{12}$ である。

(答) 放物線 $y=\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{49}{12}$

(3)

まず，$x$ 軸に接する円の方程式は，その中心を $(p,q)$ として

$$(x-p)^2+(y-q)^2=q^2 \qquad \cdots ①$$

と表せる。また，(2)の結果より，この円が円 $C$ に外接するための条件は

$$q=\frac{p^2}{12}-\frac{5}{6}p+\frac{49}{12} \qquad \cdots ②$$

である。さらに，(1)より直線 $\ell$ の方程式は

$$\frac{4}{3}x-y=0$$

であり，直線 $\ell$ と円①が接するための条件は点 $(p,q)$ と直線 $\ell$ の距離が円①の半径 $q$ と等しくなることであるから，点と直線の距離の公式より，

$$\frac{\left|\frac{4}{3}p-q\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1^2}}=q$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}p-q\right)^2=\frac{25}{9}q^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{16}{9}q^2+\frac{8}{3}pq-\frac{16}{9}p^2=0$$
$$\Leftrightarrow (2q-p)(q+2p)=0$$
$$\therefore q=-2p,\ \frac{1}{2}p$$

となる。これらを②式に代入して解くと，

[1] $q=-2p$ のとき

$$-2p=\frac{p^2}{12}-\frac{5}{6}p+\frac{49}{12}$$
$$\Leftrightarrow (p+7)^2=0$$
$$\Leftrightarrow p=-7$$

[2] $q=\dfrac{1}{2}p$ のとき

$$\frac{1}{2}p=\frac{p^2}{12}-\frac{5}{6}p+\frac{49}{12}$$
$$\Leftrightarrow p^2-16p+49=0$$
$$\Leftrightarrow p=8\pm\sqrt{15}$$

である。よって求める半径の値は

$$q=14,\ 4\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$$

である。

(答) $14,\ 4\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$