

1

(1)

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\ &= -\frac{7}{9}\end{aligned}$$

である。 $\tan(\alpha+\beta)<0$ と $0<\alpha, \beta<\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ であるので、

$\cos(\alpha+\beta)<0, \sin(\alpha+\beta)>0$ である。 よって

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha+\beta)}} \\ &= -\frac{9}{\sqrt{130}} \\ \sin(\alpha+\beta) &= \tan(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{7}{\sqrt{130}}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{7}{\sqrt{130}}, \cos(\alpha+\beta) = -\frac{9}{\sqrt{130}}$$

(2)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\alpha+\beta \leq \alpha+\beta+x \leq \alpha+\beta+\frac{\pi}{2}$ である。(1)より $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta, \alpha+\beta+\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$

である。ここで

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= -\frac{7}{9}, \\ \tan\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{9}{7}\end{aligned}$$

となるが、 $\tan\theta$ は $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ の範囲で単調増加であるから、

$$-\frac{7}{9} \leq \tan(\alpha+\beta+x) \leq \frac{9}{7}$$

となる。

$$(答) \quad -\frac{7}{9} \leq \tan(\alpha+\beta+x) \leq \frac{9}{7}$$

(3)

$$f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}+x\right)$$

である。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\alpha+\beta+\frac{\pi}{4} \leq \alpha+\beta+\frac{\pi}{4}+x \leq \alpha+\beta+\frac{3}{4}\pi$ である。

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi, \tan(\alpha+\beta) &= -\frac{7}{9} > -1 = \tan\frac{3}{4}\pi \\ \Rightarrow \frac{3}{4}\pi &< \alpha+\beta < \pi\end{aligned}$$

となるから、

$$\pi < \alpha+\beta+\frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi$$

である。また

$$\frac{3}{2}\pi < \alpha+\beta+\frac{3}{4}\pi < \frac{7}{4}\pi$$

であるから、 $f(x)$ は $\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}+x = \alpha+\beta+\frac{\pi}{4}$ つまり $x=0$ で最大値

$$f(0) = \sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) = -\frac{2}{\sqrt{130}}$$

を取り、 $\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}+x = \frac{3}{2}\pi$ つまり $x = \frac{5}{4}\pi - (\alpha+\beta)$ のとき最小値

$$f\left(\frac{5}{4}\pi - (\alpha+\beta)\right) = \sqrt{2} \sin\frac{3}{2}\pi = -\sqrt{2}$$

を取る。

$$(答) \quad \text{最大値} -\frac{2}{\sqrt{130}} (x=0), \text{最小値} -\sqrt{2} \left(x = \frac{5}{4}\pi - (\alpha+\beta)\right)$$

(4)

(3)より $\gamma = \frac{5}{4}\pi - (\alpha+\beta)$ であるから、

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{5}{4}\pi$$

である。また

$$\begin{aligned}\tan\gamma &= \tan\left\{\frac{5}{4}\pi - (\alpha+\beta)\right\} \\ &= \frac{\tan\frac{5}{4}\pi - \tan(\alpha+\beta)}{1 + \tan\frac{5}{4}\pi \tan(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\frac{16}{9}}{\frac{2}{9}} \\ &= 8\end{aligned}$$

となる。また、 $0<\alpha, \beta<\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi<\alpha+\beta<\pi$ であることから

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2} &< \beta - \alpha < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} &< \gamma - \beta \left(= \frac{5}{4}\pi - \alpha - 2\beta\right) < \gamma \left(= \frac{5}{4}\pi - (\alpha+\beta)\right) < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

であり、 $\tan x$ は $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加関数である。一方、

$$\begin{aligned}\tan(\beta-\alpha) &= \frac{5-2}{1+5\cdot 2} = \frac{3}{11} \\ \tan(\gamma-\beta) &= \frac{8-5}{1+8\cdot 5} = \frac{3}{41}\end{aligned}$$

であることから、 $\tan(\beta-\alpha) > \tan(\gamma-\beta)$ より $\beta-\alpha > \gamma-\beta$ を得る。

(証明終)

$$(答) \quad \alpha+\beta+\gamma = \frac{5}{4}\pi, \tan\gamma = 8$$

(5)

$\alpha+\beta+\gamma = \frac{5}{4}\pi, \beta-\alpha > \gamma-\beta$ より

$$\begin{aligned}\beta-\alpha &> \gamma-\beta \\ \Leftrightarrow 3\beta &> \alpha+\beta+\gamma = \frac{5}{4}\pi \\ \Leftrightarrow \beta &> \frac{5}{12}\pi\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(1)

円 C の方程式を整理すると

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 &= 1\end{aligned}$$

となるから、円 C は半径 1、中心 $(5, 5)$ の円である。原点を通る直線は $x=0$, $y=mx$ と表されるが、直線 $x=0$ は明らかに円 C と接しない。直線 $y=mx$ が円 C と接するとき、直線 $y=mx$ と点 $(5, 5)$ の距離が 1 であるから、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned}\frac{|5m-5|}{\sqrt{m^2+1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow (5m-5)^2 &= m^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 12m^2 - 25m + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3m-4)(4m-3) &= 0 \\ \therefore m &= \frac{4}{3}, \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。大きい傾きのほうが直線 l の傾きであるので求める値は $m = \frac{4}{3}$ である。

(答) $\frac{4}{3}$

(2)

題意の円を D 、中心を (p, q) とおく。円 D は x 軸に接しているから、その半径は q である。また円 C と D は外接しているから、点 $(5, 5)$ と点 (p, q) の距離は $q+1$ である。よって

$$\begin{aligned}(p-5)^2 + (q-5)^2 &= (q+1)^2 \\ \Leftrightarrow q &= \frac{p^2}{12} - \frac{5}{6}p + \frac{49}{12}\end{aligned}$$

となる。よって求める軌跡は放物線 $y = \frac{x^2}{12} - \frac{5}{6}x + \frac{49}{12}$ である。

(答) 放物線 $y = \frac{x^2}{12} - \frac{5}{6}x + \frac{49}{12}$

(3)

まず、 x 軸に接する円の方程式は、その中心を (p, q) として

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = q^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また、(2)の結果より、この円が円 C に外接するための条件は

$$q = \frac{p^2}{12} - \frac{5}{6}p + \frac{49}{12} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。さらに、(1)より直線 ℓ の方程式は

$$\frac{4}{3}x - y = 0$$

であり、直線 ℓ と円①が接するための条件は点 (p, q) と直線 ℓ の距離が円①の半径 q と等しくなることであるから、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned}\frac{\left|\frac{4}{3}p - q\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}} &= q \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}p - q\right)^2 &= \frac{25}{9}q^2 \\ \Leftrightarrow \frac{16}{9}q^2 + \frac{8}{3}pq - \frac{16}{9}p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2q - p)(q + 2p) &= 0 \\ \therefore q &= -2p, \frac{1}{2}p\end{aligned}$$

となる。これらを②式に代入して解くと、

[1] $q = -2p$ のとき

$$\begin{aligned}-2p &= \frac{p^2}{12} - \frac{5}{6}p + \frac{49}{12} \\ \Leftrightarrow (p+7)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -7\end{aligned}$$

[2] $q = \frac{1}{2}p$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p &= \frac{p^2}{12} - \frac{5}{6}p + \frac{49}{12} \\ \Leftrightarrow p^2 - 16p + 49 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= 8 \pm \sqrt{15}\end{aligned}$$

である。よって求める半径の値は

$$q = 14, 4 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

である。

(答) $14, 4 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$

(1) ;

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos t)'}{\cos t} dt \\
 &= - \left[\log |\cos t| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ (1 + \tan^2 t) - 1 \right\} dt \\
 &= \left[\tan t - t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt = \frac{1}{2} \log 2, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(2)

(1)を用いて

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt - 2x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt + x^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4} - x \log 2 + \frac{\pi}{4} x^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} x^2 - x \log 2 + 1 - \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{2 \log 2}{\pi} \right)^2 + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{(\log 2)^2}{\pi}
 \end{aligned}$$

となる。よって $f(x)$ は $x = \frac{2 \log 2}{\pi}$ のとき最小値

$$f\left(\frac{2 \log 2}{\pi}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{(\log 2)^2}{\pi}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{(\log 2)^2}{\pi} \left(x = \frac{2 \log 2}{\pi} \right)$$

(3)

[1] $x \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\tan t - x| dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t - x) dt \\
 &= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4} x \geq g(0) = \frac{1}{2} \log 2
 \end{aligned}$$

である。

[2] $x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\tan t - x| dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x - \tan t) dt \\
 &= \frac{\pi}{4} x - \frac{1}{2} \log 2 \geq g(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2
 \end{aligned}$$

である。

[3] $0 < x < 1$ のとき $x = \tan u$ かつ $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$ となる u が一つだけ存在し、

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\tan t - x| dt \\
 &= \int_0^u (x - \tan t) dt + \int_u^{\frac{\pi}{4}} (\tan t - x) dt \\
 &= \left[\log |\cos t| + xt \right]_0^u - \left[\log |\cos t| + xt \right]_u^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \log |\cos u| + xu - \left(-\frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} x - \log |\cos u| - xu \right) \\
 &= \left(2u - \frac{\pi}{4} \right) \tan u + 2 \log (\cos u) + \frac{1}{2} \log 2
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{du} g(x) &= \left(2u - \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{\cos^2 u} + 2 \tan u - 2 \tan u \\
 &= \left(2u - \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{\cos^2 u}
 \end{aligned}$$

であるから、 $g(x)$ の増減表は以下ようになる

u	0	...	$\frac{\pi}{8}$	...	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{d}{du} g(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$\frac{1}{2} \log 2$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$

したがって $0 < x < 1$ において、 $g(x)$ は $u = \frac{\pi}{8}$ 、つまり

$$\begin{aligned}
 x &= \tan \frac{\pi}{8} \\
 &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} - 1
 \end{aligned}$$

のとき最小値

$$\begin{aligned}
 2 \log \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) + \frac{1}{2} \log 2 &= \log \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1}{2} \log 2 \\
 &= \log \frac{1 + \sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

をとる。以上[1], [2], [3]より、 $g(x)$ は $x = \sqrt{2} - 1$ で最小値 $\log \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \log \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \left(x = \sqrt{2} - 1 \right)$$