

(1)

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$$

であるから、行列 J は原点中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動する変換を表す行列である。よって、自然数 n に対し、

$$J^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{2n}{3}\pi & -\sin \frac{2n}{3}\pi \\ \sin \frac{2n}{3}\pi & \cos \frac{2n}{3}\pi \end{pmatrix}$$

となるから

$$I + J + J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{4}{3}\pi & -\sin \frac{4}{3}\pi \\ \sin \frac{4}{3}\pi & \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 + \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \frac{4}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi - \sin \frac{4}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{4}{3}\pi & 1 + \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = O$$

であり、また

$$J^3 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = I$$

である。

(答) $I + J + J^2 = O, J^3 = I$

(2)

行列 J は原点中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動する変換を表す行列であり

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = J^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

より、 $B(b_1, b_2)$ は $A(a_1, a_2)$ を原点中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動させた点、 $C(c_1, c_2)$ は $A(a_1, a_2)$ を

原点中心に $\frac{4}{3}\pi$ だけ回転移動させた点である。これより、 $OA = OB = OC$ であるから三角形

ABC は原点中心の円に内接する。さらに

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{2}{3}\pi$$

であるから、円周角と中心角の関係より

$$\angle ACB = \angle BAC = \angle CBA = \frac{1}{3}\pi$$

となる。よって、3 点 A, B, C は正三角形をなすことが示された。

(証明終)

(3)

(1)の結果より

$$I + J + J^2 = O \\ \Leftrightarrow J^2 = -I - J$$

となるから

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + J^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + (-I - J) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -J \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで

$$-J = \begin{pmatrix} -\cos \frac{2}{3}\pi & \sin \frac{2}{3}\pi \\ -\sin \frac{2}{3}\pi & -\cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{1}{3}\pi \right) & -\sin \left(-\frac{1}{3}\pi \right) \\ \sin \left(-\frac{1}{3}\pi \right) & \cos \left(-\frac{1}{3}\pi \right) \end{pmatrix}$$

であるから、 $-J$ は原点中心に $-\frac{1}{3}\pi$ だけ回転移動する変換を表す行列である。また、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CA}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より点 A は点 B を点 C の周りに $-\frac{\pi}{3}$ 回転させた点となる。よって、三角形

ABC は

$$AC = BC, \angle ACB = \frac{1}{3}\pi$$

であるから、正三角形となることが示された。

(証明終)

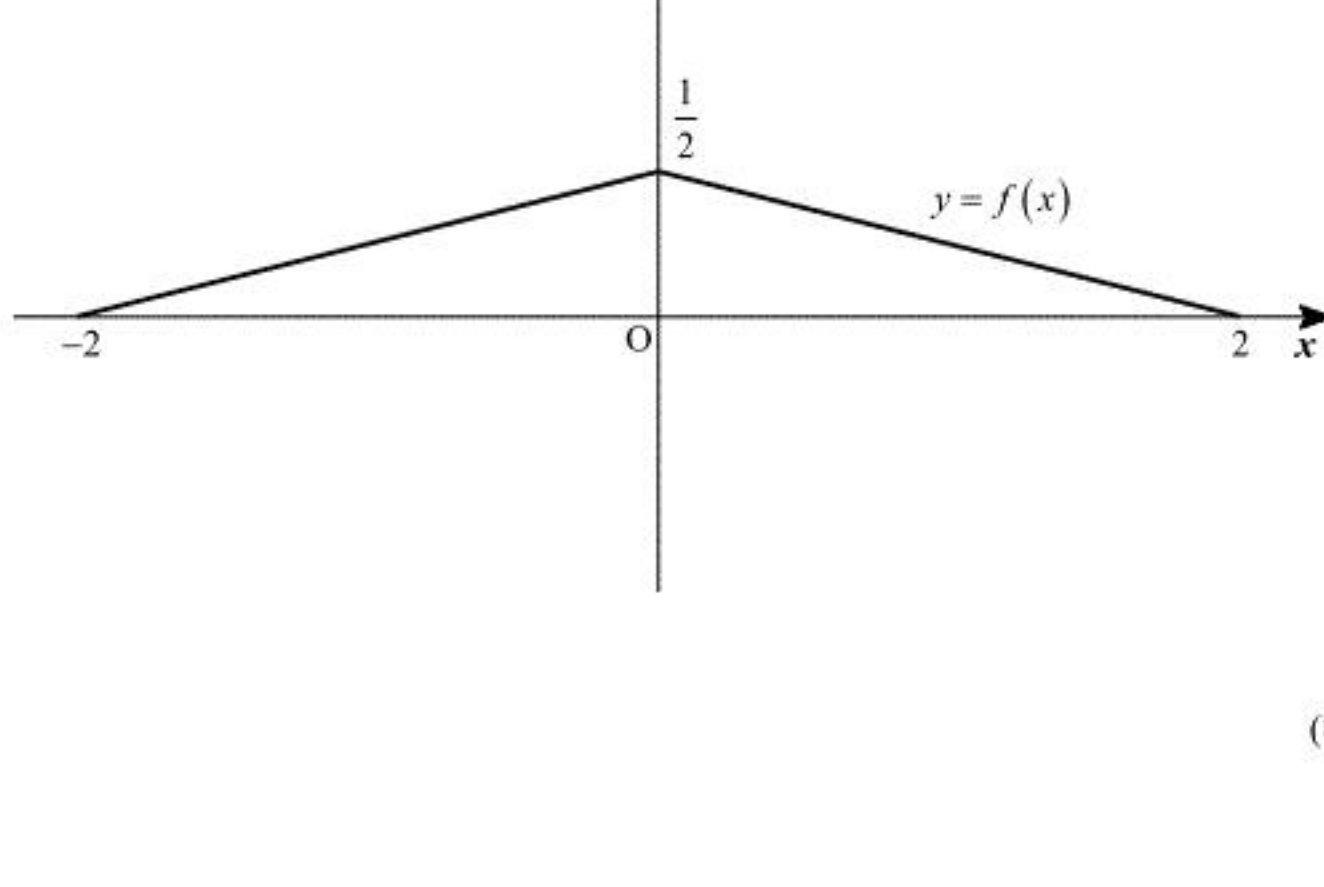
2

(1)

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}|x|$ であるとき

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x & (-2 \leq x < 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

となるから、 $y = f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

[1] $-2 \leq x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-2}^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2 \right]_{-2}^x \\ &= \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}(x+2)^2 \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 \leq x \leq 2$ のとき

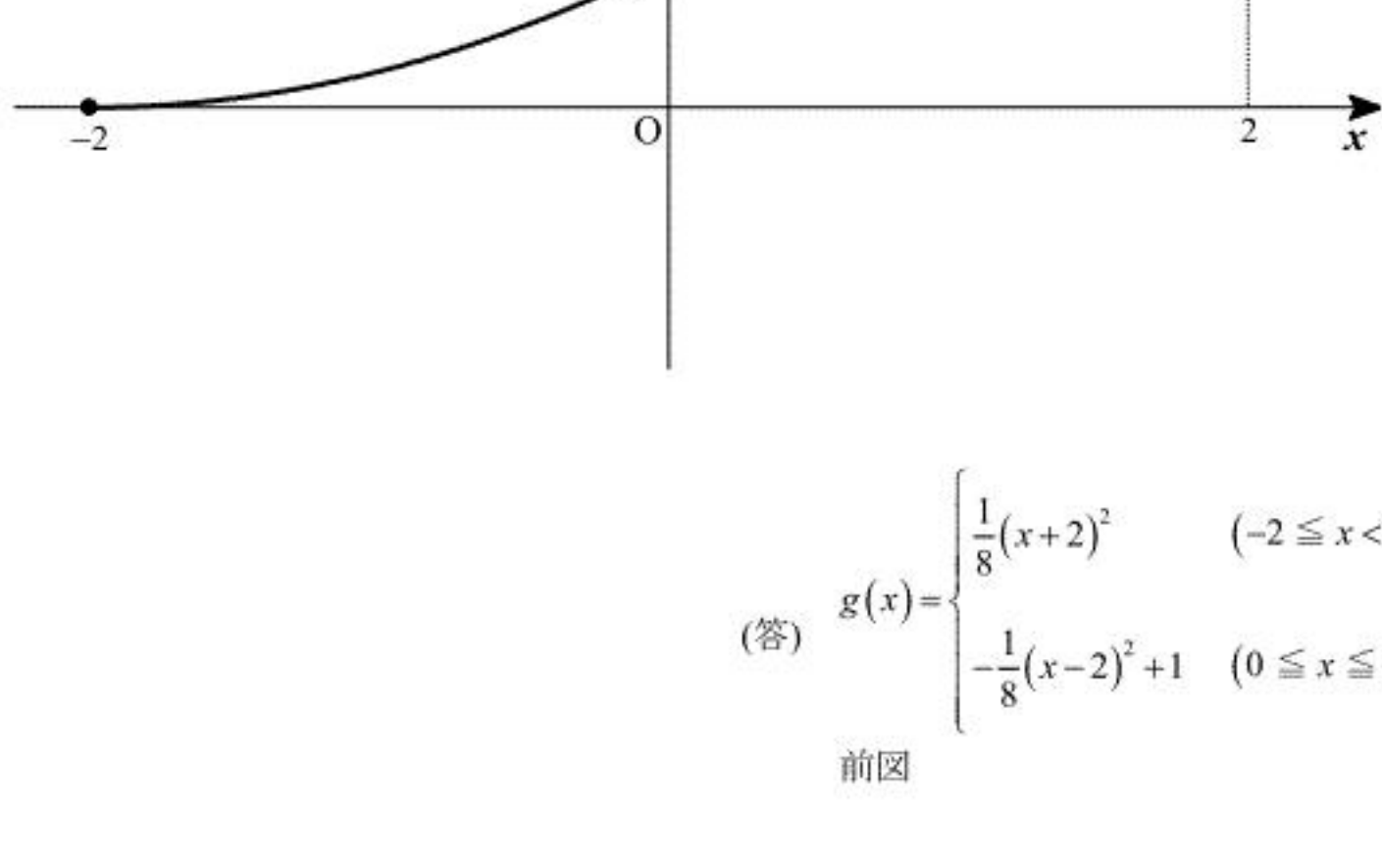
$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \right) dt + \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]より

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+2)^2 & (-2 \leq x < 0) \\ -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 1 & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

となり、 $y = g(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



$$(答) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+2)^2 & (-2 \leq x < 0) \\ -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 1 & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

前図

(3)

[1] $-2 \leq x < 0$ のとき

$y = g(x)$ の値域は $0 \leq y < \frac{1}{2}$ となり

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{8}(x+2)^2 \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 &= 8y \\ \Leftrightarrow x+2 &= 2\sqrt{2y} \quad (\because x+2 \geq 0, y \geq 0) \\ \Leftrightarrow x &= 2\sqrt{2y} - 2 \end{aligned}$$

となるから、 $y = g(x)$ の逆関数 $y = g^{-1}(x)$ は $0 \leq x < \frac{1}{2}$ のとき、

$$g^{-1}(x) = 2\sqrt{2x} - 2$$

となる。

[2] $0 \leq x \leq 2$ のとき

$y = g(x)$ の値域は $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ となり

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= 8(1-y) \\ \Leftrightarrow x-2 &= -2\sqrt{2(1-y)} \quad (\because x-2 \leq 0, 1-y \geq 0) \\ \Leftrightarrow x &= -2\sqrt{2(1-y)} + 2 \end{aligned}$$

となるから、 $y = g(x)$ の逆関数 $y = g^{-1}(x)$ は $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ のとき、

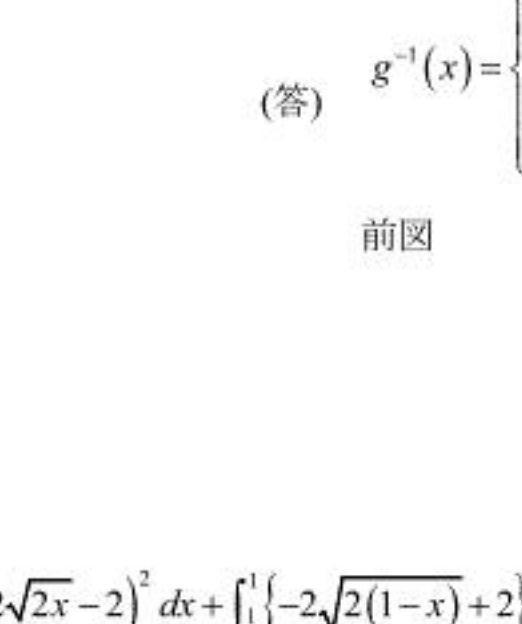
$$g^{-1}(x) = -2\sqrt{2(1-x)} + 2$$

となる。

以上, [1], [2]より

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2x} - 2 & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -2\sqrt{2(1-x)} + 2 & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となり、 $y = g^{-1}(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



$$(答) \quad g^{-1}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2x} - 2 & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -2\sqrt{2(1-x)} + 2 & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

前図

(4)

(3)より

$$\int_0^1 \{g^{-1}(x)\}^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2x} - 2)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-2\sqrt{2(1-x)} + 2)^2 dx$$

である。ここで、右辺第2項において $t = 1 - x$ とおくと

$$\begin{array}{c|c|c} x & \frac{1}{2} & \rightarrow 1 \\ \hline t & \frac{1}{2} & \rightarrow 0 \end{array}$$

であり、また

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

となるから

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \{-2\sqrt{2(1-x)} + 2\}^2 dx &= \int_{\frac{1}{2}}^0 \{-2\sqrt{2t} + 2\}^2 (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2t} - 2)^2 dt \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{g^{-1}(x)\}^2 dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2x} - 2)^2 dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2t} - 2)^2 dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2x} - 2)^2 dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 2\sqrt{2x} + 1) dx \\ &= 8 \left[x^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \int_0^1 \{g^{-1}(x)\}^2 dx = \frac{2}{3}$$

(5)

$G_1(x) = 2\sqrt{2x} - 2$ ($x \geq 0$), $G_2(x) = -2\sqrt{2(1-x)} + 2$ ($x \leq 1$) とおくと、 $G_1(x)$, $G_2(x)$ はそれぞれ

$x > 0$, $x < 1$ において微分可能であり

$$G_1'(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \quad (x > 0)$$

$$G_2'(x) = \sqrt{\frac{2}{1-x}} \quad (x < 1)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{2}+h\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{G_1\left(\frac{1}{2}+h\right) - G_1\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \\ &= G_1'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となり、また

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{2}+h\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{G_2\left(\frac{1}{2}+h\right) - G_2\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \\ &= G_2'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{2}+h\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{2}+h\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

が成り立つ。よって、 $y = g^{-1}(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で微分可能であることが示された。

(証明終)

(1)

$f(x)$ が $x-1$ で割り切れるという条件が成り立つとき、因数定理より $f(1)=0$ となり

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k &= 0 \end{aligned}$$

であることから、求める確率は表と裏が同じ回数ずつ出る確率となる。 n が偶数のとき、求める確率は表と裏が $\frac{n}{2}$ 回ずつ出る確率に等しく

$${}_nC_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = {}nC_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。

$$(\text{答}) {}nC_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2)

$f(x)$ が $(x-1)(x+1)$ で割り切れるという条件が成り立つとき、因数定理より $f(1)=0$ かつ $f(-1)=0$ となる。 n が4の倍数のとき、 n は偶数であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-1)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=0 \\ -a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{n-3}+a_{n-2}-a_{n-1}+a_n=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a_1+a_3+\cdots+a_{n-3}+a_{n-1}=0 \\ a_2+a_4+\cdots+a_{n-2}+a_n=0 \end{cases} \end{aligned}$$

である。これを満たすのは、(1)と同様に考えて、奇数回目の硬貨投げ全 $\frac{n}{2}$ 回のうち表と裏が

$\frac{n}{4}$ 回ずつ出て、かつ、偶数回目の硬貨投げ全 $\frac{n}{2}$ 回のうち表と裏が $\frac{n}{4}$ 回ずつ出る場合である。

よって、求める確率は

$${}_nC_{\frac{n}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}} \cdot {}nC_{\frac{n}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}} = \left({}_nC_{\frac{n}{4}}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。

$$(\text{答}) \left({}_nC_{\frac{n}{4}}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3)

$n \geq 2$ のとき

$$f(2) = \sum_{k=1}^n a_k 2^k$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^k &\leq \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2^n - 2 \end{aligned}$$

であることから

$$f(2) \leq 2^n - 2 + 2^n a_n$$

となる。したがって、 $a_n = -1$ と仮定すると $f(2) \leq -2$ となり、 $f(2) = 2$ となりえない。これより、 $f(2) = 2$ となるためには

$$a_n = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となることが必要である。このとき $f(2) = 2$ となる条件は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^k &= 2 - 2^n \\ &= -(2^n - 2) \end{aligned}$$

である。 a_k ($1 \leq k \leq n-1$) は1または-1という値をとり、 $a_k = 1$ ($1 \leq k \leq n-1$) のとき、

$\sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^k = 2^n - 2$ となることから、 $\sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^k = -(2^n - 2)$ となるのは

$$a_k = -1 \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

のときであると分かる。以上より、 $f(2) = 2$ となるのは、①かつ②となる場合であるから、求める確率は

$$\frac{1}{2^n}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{1}{2^n}$$

(1)

関数 $y = x^2$ の導関数は $y' = 2x$ であることより、 $C_1: y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2$$

$$\therefore y = 2tx - t^2$$

となる。この直線が $C_2: y = ax^2 + bx + c$ と接する条件は

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 2tx - t^2 \end{cases}$$

を連立させて得られる x の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 2tx - t^2$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 2t)x + c + t^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が重解を持つ条件と一致し、 $a \neq 0$ より、2 次方程式①の解の判別式を D とすると、 $D = 0$ であることと同値である。よって、

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - 2t)^2 - 4a(c + t^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - a)t^2 - 4bt + b^2 - 4ac = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。2 次関数の凹凸性より、②を満たす実数 t の値 1 つに対して C_1, C_2 の共通接線が 1 本決まるため、 C_1, C_2 の共通接線の本数は②を満たす実数 t の個数に等しい。 $a = 1$ のとき、②は

$$4bt + b^2 - 4c = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 C_1, C_2 が異なる曲線であるためには $b = c = 0$ であってはならない。 $b = c = 0$ でないとき t の方程式③の実数解は最大でも 1 つしか存在しない。したがって、 $a = 1$ のとき C_1, C_2 の共通接線は最大でも 1 本しか存在しない。

(証明終)

(2)

$a = 1$ のとき C_1, C_2 の共通接線の本数は式③を満たす実数 t の個数に等しい。また、 C_1, C_2 が異なる曲線であるため $b = c = 0$ ではない。よって、 t の方程式③は

$$b \neq 0 \text{ のとき, } 1 \text{ つの実数解を持つ}$$

$$b = 0 \text{ のとき, } c \neq 0 \text{ となるから実数解を持たない}$$

となる。これより、 $b \neq 0$ は方程式③が実数解を 1 つだけ持つための必要十分条件となる。したがって、 $b \neq 0$ は C_1, C_2 の共通接線が 1 本だけ存在する必要十分条件である。

(証明終)

(3)

$C_1: y = x^2$ と $C_2: y = ax^2 + bx + c$ の共有点の x 座標は方程式

$$x^2 = ax^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)x^2 + bx + c = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

の実数解 x に対応し、 C_1, C_2 上の点の y 座標はある x 座標の値に対してただ 1 つに定まるため、 x の方程式④の実数解の個数と C_1, C_2 の共有点の個数は一致する。 $a \neq 1$ より、2 次方程式④の判別式を D_1 とおくと、

$$D_1 = b^2 - 4(a - 1)c$$

となる。次に、 $a \neq 1$ のとき、 t の方程式②は 2 次方程式となる。(2)で述べたように方程式②の実数解の個数と C_1, C_2 の共通接線の本数は等しい。2 次方程式②の解の判別式を D_2 とおくと

$$D_2 = 16b^2 - 4 \cdot 4(1 - a) \cdot (b^2 - 4ac)$$

$$= 16a \{ b^2 - 4(a - 1)c \}$$

となる。以上より、

$$D_2 = 16aD_1 \quad \dots \textcircled{5}$$

である。ここで、各条件は

$$p_1: C_2 \text{ は下に凸である} \Leftrightarrow a > 0$$

$$p_2: C_2 \text{ は上に凸である} \Leftrightarrow a < 0$$

$$q_1: C_1 \text{ と } C_2 \text{ が異なる 2 点で交わる} \Leftrightarrow D_1 > 0$$

$$q_2: C_1 \text{ と } C_2 \text{ が交わらない} \Leftrightarrow D_1 < 0$$

とかける。これより、

$$p: \text{「} p_1 \text{ かつ } q_1 \text{」または「} p_2 \text{ かつ } q_2 \text{」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} a > 0 \text{ かつ } D_1 > 0 \text{」または「} a < 0 \text{ かつ } D_1 < 0 \text{」}$$

となる。また、

$$q: C_1 \text{ と } C_2 \text{ の両方に接する直線が 2 本存在する} \Leftrightarrow D_2 > 0$$

である。⑤より

$$D_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow aD_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ D_1 > 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a < 0 \\ D_1 < 0 \end{cases}$$

となる。以上より $q \Leftrightarrow p$ 、つまり、条件 p は条件 q の必要十分条件である。

(証明終)