

1

(1)

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$$

であるから、行列 J は原点中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動する変換を表す行列である。よって

$$J^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{2n}{3}\pi & -\sin \frac{2n}{3}\pi \\ \sin \frac{2n}{3}\pi & \cos \frac{2n}{3}\pi \end{pmatrix}$$

となるから

$$I + J + J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{4}{3}\pi & -\sin \frac{4}{3}\pi \\ \sin \frac{4}{3}\pi & \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 + \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \frac{4}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi - \sin \frac{4}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{4}{3}\pi & 1 + \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = O$$

であり、また

$$J^3 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = I$$

である。

(答) $I + J + J^2 = O, J^3 = I$

(2)

行列 J は原点中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動する変換を表す行列であり

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = J^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

より、 $B(b_1, b_2)$ は $A(a_1, a_2)$ を原点中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動させた点、 $C(c_1, c_2)$ は $A(a_1, a_2)$ を

原点中心に $\frac{4}{3}\pi$ だけ回転移動させた点である。これより、 $OA = OB = OC$ であるから三角形

ABC は原点中心の円に内接する。さらに

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{2}{3}\pi$$

であるから、円周角と中心角の関係より

$$\angle ACB = \angle BAC = \angle CBA = \frac{1}{3}\pi$$

となる。よって、3 点 A, B, C は正三角形をなすことが示された。

(証明終)

(3)

(1)の結果より

$$I + J + J^2 = O \\ \Leftrightarrow J^2 = -I - J$$

となるから

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + J^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + (-I - J) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -J \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで

$$-J = \begin{pmatrix} -\cos \frac{2}{3}\pi & \sin \frac{2}{3}\pi \\ -\sin \frac{2}{3}\pi & -\cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{1}{3}\pi \right) & -\sin \left(-\frac{1}{3}\pi \right) \\ \sin \left(-\frac{1}{3}\pi \right) & \cos \left(-\frac{1}{3}\pi \right) \end{pmatrix}$$

であるから、 $-J$ は原点中心に $-\frac{1}{3}\pi$ だけ回転移動する変換を表す行列である。また、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \overline{CA}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \overline{CB}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より点 A は点 B を点 C の周りに $-\frac{\pi}{3}$ 回転させた点となる。よって、三角形

ABC は

$$AC = BC, \angle ACB = \frac{1}{3}\pi$$

であるから、正三角形となることが示された。

(証明終)

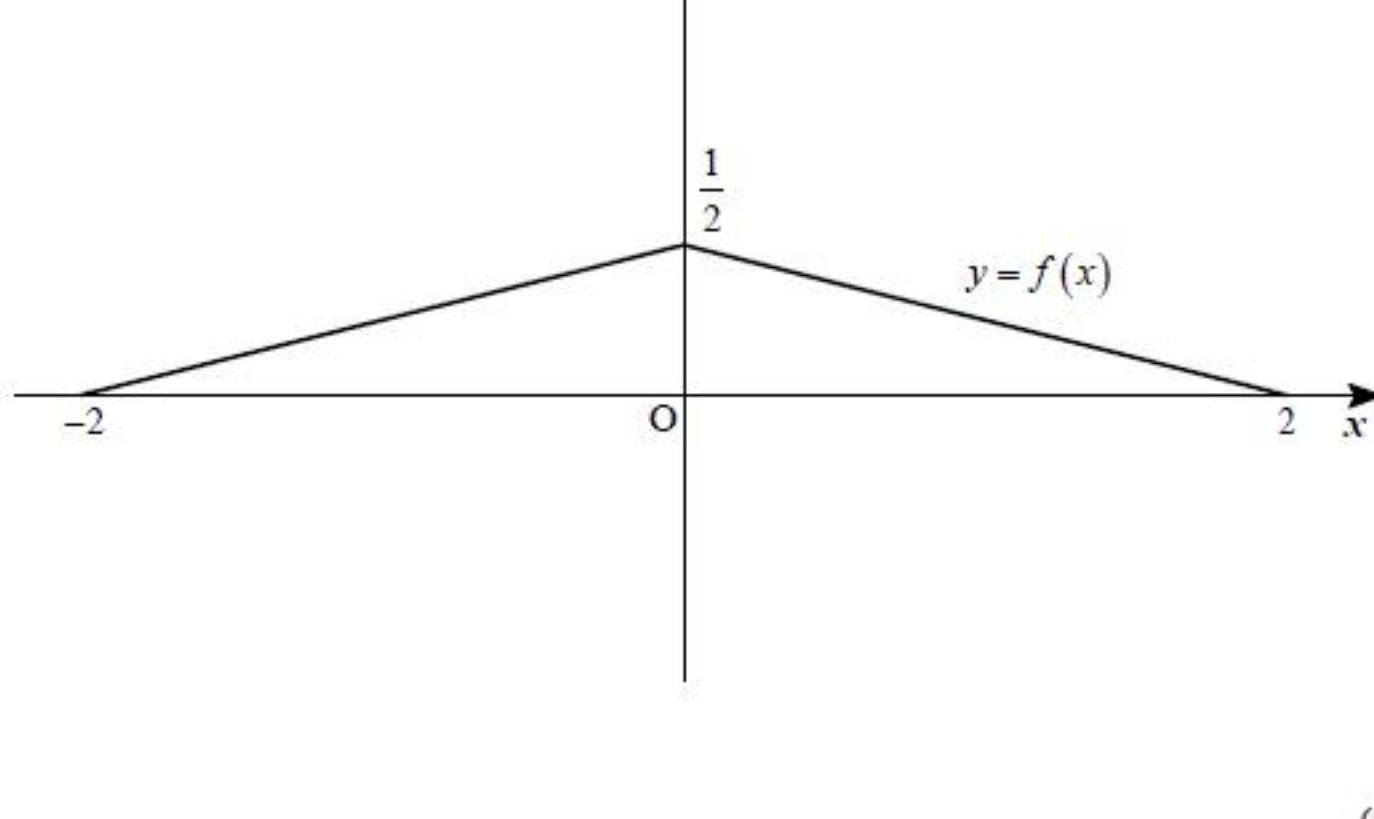
2

(1)

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}|x|$ であるとき

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x & (-2 \leq x < 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

となるから、 $y = f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

[1] $-2 \leq x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-2}^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2 \right]_{-2}^x \\ &= \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}(x+2)^2 \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 \leq x \leq 2$ のとき

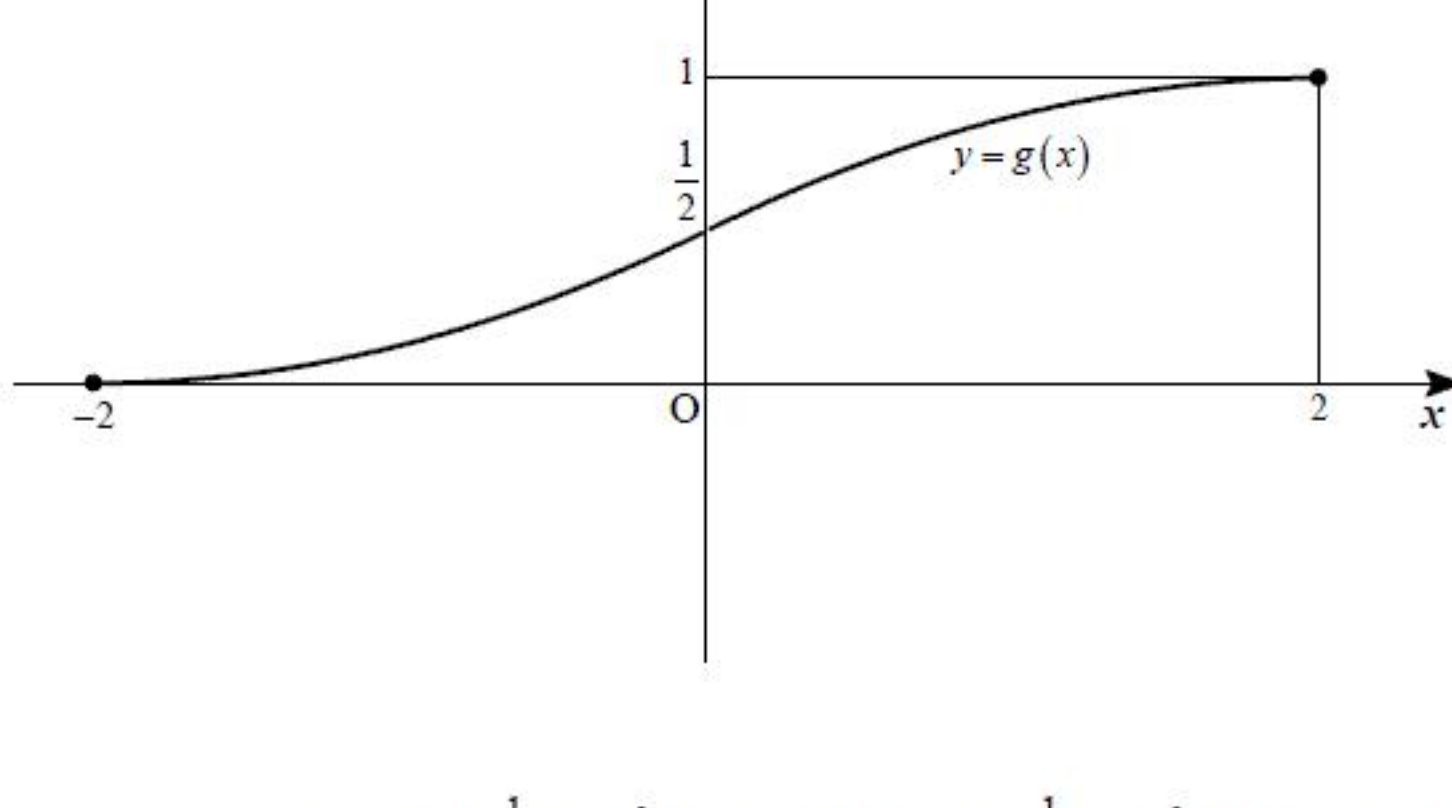
$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \right) dt + \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+2)^2 & (-2 \leq x < 0) \\ -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 1 & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

となり、 $y = g(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) $g(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2$ ($-2 \leq x < 0$), $g(x) = -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$), 前図

(3)

[1] $-2 \leq x < 0$ のとき

$y = g(x)$ の値域は $0 \leq y < \frac{1}{2}$ となり

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{8}(x+2)^2 \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 &= 8y \\ \Leftrightarrow x+2 &= 2\sqrt{2y} \quad (\because x+2 \geq 0, y \geq 0) \\ \Leftrightarrow x &= 2\sqrt{2y} - 2 \end{aligned}$$

となるから、 $y = g(x)$ の逆関数 $y = g^{-1}(x)$ は

$$g^{-1}(x) = 2\sqrt{2x} - 2 \quad (0 \leq x < \frac{1}{2})$$

となる。

[2] $0 \leq x \leq 2$ のとき

$y = g(x)$ の値域は $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ となり

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= 8(1-y) \\ \Leftrightarrow x-2 &= -2\sqrt{2(1-y)} \quad (\because x-2 \leq 0, 1-y \geq 0) \\ \Leftrightarrow x &= -2\sqrt{2(1-y)} + 2 \end{aligned}$$

となるから、 $y = g(x)$ の逆関数 $y = g^{-1}(x)$ は

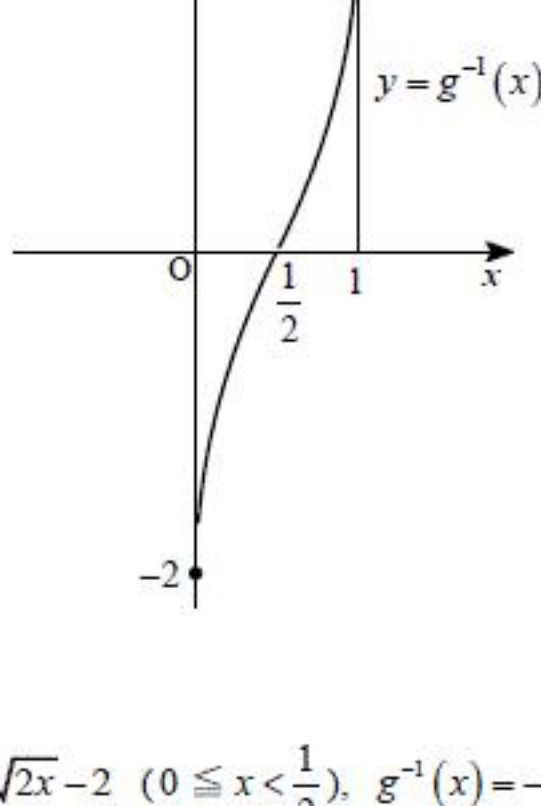
$$g^{-1}(x) = -2\sqrt{2(1-x)} + 2 \quad (\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$$

となる。

以上, [1], [2] より

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2x} - 2 & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -2\sqrt{2(1-x)} + 2 & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となり、 $y = g^{-1}(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) $g^{-1}(x) = 2\sqrt{2x} - 2$ ($0 \leq x < \frac{1}{2}$), $g^{-1}(x) = -2\sqrt{2(1-x)} + 2$ ($\frac{1}{2} \leq x \leq 1$), 前図

(4)

$$\int_0^1 \{g^{-1}(x)\}^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2x} - 2)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \{-2\sqrt{2(1-x)} + 2\}^2 dx$$

である。ここで、 $t = 1 - x$ とおくと

$$\begin{array}{c|c} x & \frac{1}{2} \rightarrow 1 \\ \hline t & \frac{1}{2} \rightarrow 0 \end{array}$$

であり

$$dx = -dt$$

となるから

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \{-2\sqrt{2(1-x)} + 2\}^2 dx &= \int_{\frac{1}{2}}^0 (-2\sqrt{2t} + 2)^2 (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2t} - 2)^2 dt \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{g^{-1}(x)\}^2 dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2x} - 2)^2 dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2t} - 2)^2 dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{2x} - 2)^2 dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 1) dx \\ &= 8 \left[x^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\int_0^1 \{g^{-1}(x)\}^2 dx = \frac{2}{3}$

(5)

$G_1(x) = 2\sqrt{2x} - 2$ ($x \geq 0$), $G_2(x) = -2\sqrt{2(1-x)} + 2$ ($x \leq 1$) とおくと、 $G_1(x)$, $G_2(x)$ はそれぞれ

$x > 0$, $x < 1$ において微分可能であり

$$G_1'(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \quad (x > 0)$$

$$G_2'(x) = \sqrt{\frac{2}{1-x}} \quad (x < 1)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{2}+h\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{G_1\left(\frac{1}{2}+h\right) - G_1\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \\ &= G_1'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となり、また

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{2}+h\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{G_2\left(\frac{1}{2}+h\right) - G_2\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \\ &= G_2'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{2}+h\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{2}+h\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

が成り立つ。よって、 $y = g^{-1}(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で微分可能であることが示された。

(証明終)