

数 学 共 通

(数学科, 物理学科, 生物学科用)

注 意 事 項

試験開始の合図があるまでは、この冊子を開いてはいけない。

1. この冊子の本文は 3 ページである。印刷の不鮮明な部分、ページの脱落などがあつた場合は申し出ること。
2. 答案用紙には、すべてに受験番号と氏名を記入すること。

記入例

受験 番号	1	2	3	4	5	氏名	(氏 名)
----------	---	---	---	---	---	----	-------

3. 解答は、それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと。
4. この冊子の余白部分は下書きに使用してもよい。
5. この冊子及び下書き用紙は持ち帰ること。

1 $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 5, 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ とする. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 上で関数

$$f(x) = \sin(\alpha + \beta + x) + \cos(\alpha + \beta + x)$$

を考える.

- (1) $\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta)$ を求めよ.
- (2) $\tan(\alpha + \beta + x)$ の値の範囲を求めよ.
- (3) $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ.
- (4) $f(x)$ が最小となるときの x を γ とする. $\alpha + \beta + \gamma, \tan \gamma$ を求め,
 $\beta - \alpha > \gamma - \beta$ となることを示せ.
- (5) $\beta > \frac{5\pi}{12}$ となることを示せ.

- 2 O を原点とする座標平面上の円 $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0$ を C とする.
原点 O を通り, 円 C に接する直線のうち, 傾きの大きい方を l とする.

- (1) l の傾きを求めよ.
- (2) x 軸に接し, 円 C と外接するような円の中心 P の描く軌跡を求めよ.
- (3) 直線 l と x 軸に接し, さらに円 C と外接する円の半径をすべて求めよ.

3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad a_{n+3} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 2a_n$ を示せ.

(2) $a_n \leq \sqrt{2^n}$ を示せ.

さらに, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \begin{cases} 0 & a_n \text{ が偶数のとき} \\ 1 & a_n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. また, 自然数 k に対して, 条件

$$p_k: \text{すべての自然数 } n \text{ について } b_{n+k} = b_n \text{ が成り立つ}$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(3) 条件 p_k を満たす最小の自然数 k を求めよ.

(4) p, q, r を整数とし, 数列 $\{a_n\}$ の a_1, a_2, a_3 を $a_1 = p, a_2 = q, a_3 = r$ に置き換え, 数列 $\{b_n\}$ もそれにあわせて置き換える. p, q, r をどのように選んでも, 条件 p_k を満たす自然数 k が存在することを示せ.