

(1)

点Pが、1回目にaで動き、2回目にbで動くとき、 (a, b) のように表すとする。さいころを2回投げたときにPが点 $(1, 0)$ に動くのは、

(c, a) または (b, c)

のときである。よって、このときの確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$$

となる。

(答) $\frac{5}{36}$

(2)

aを1回行くと、点Pのx座標が1足され、点Pのx, y座標の和も1増える。bを1回行くと、点Pのy座標が1足され、点Pのx, y座標の和も1増える。cを1回行くと、点Pのx座標, y座標が交換されるだけで、点Pのx, y座標の和に変化はない。したがって、点Pのx, y座標の和は、1回の操作で高々1しか増えない。よって、点 $(2, 3)$ のx, y座標の和は $2+3=5$ より、さいころを5回投げたときにPが点 $(2, 3)$ に動くのは、aを2回、bを3回行うときであるため、その確率は

$${}_5C_2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{5}{54}$$

となる。

(答) $\frac{5}{54}$

(3)

さいころを5回投げたときにPが直線 $x=4$ 上の点に動く確率は、(2)で述べたことにも注意すると、さいころを5回投げたときにPが点 $(4, 0)$, $(4, 1)$ に動く確率に等しい。以下、Pの動く点の位置によって場合分けを行う。

[1] 点 $(4, 0)$ に動くとき

このとき、cを1回行うことが必要であり、何回目にcを行うかによって、

(c, a, a, a, a) , (b, c, a, a, a) , (b, b, c, a, a) , (b, b, b, c, a) , (b, b, b, b, c)

の5通りが考えられる。よって、このときの確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 \left(\frac{2}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{4-k} &= \frac{1}{6^5} \sum_{k=0}^4 2^k \cdot 3^{4-k} \\ &= \frac{1}{7776} (81 + 54 + 36 + 24 + 16) \\ &= \frac{211}{7776} \end{aligned}$$

となる。

[2] 点 $(4, 1)$ に動くとき

このとき、aを4回、bを1回行うことが必要であるため、このときの確率は、

$${}_5C_4 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{810}{7776}$$

となる。

以上、[1], [2]より、さいころを5回投げたときにPが直線 $x=4$ 上の点に動く確率は、

$$\frac{211}{7776} + \frac{810}{7776} = \frac{1021}{7776}$$

である。

(答) $\frac{1021}{7776}$

(1)

与式より、連立不等式は

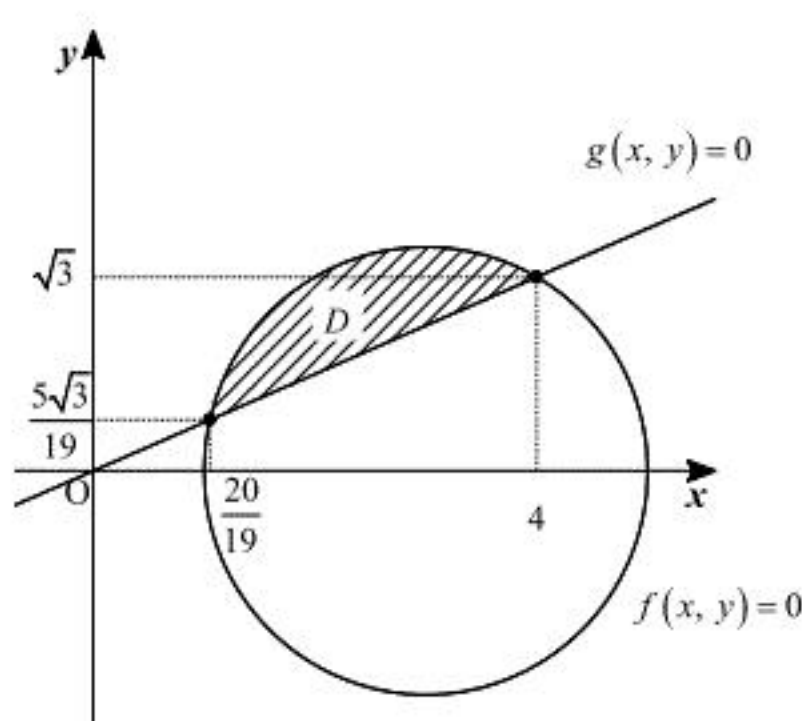
$$f(x, y) \leq 0, g(x, y) \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 \leq 4, \frac{\sqrt{3}}{4}x \leq y$$

となる。また、曲線 $f(x, y) = 0$ と曲線 $g(x, y) = 0$ の交点は

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)^2 - 4 = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 19x^2 - 96x + 80 = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (19x-20)(x-4) = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right), (4, \sqrt{3})$$

より、点 $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right), (4, \sqrt{3})$ である。以上より、求める領域 D は以下の斜線部となる。ただし、境界部分は含む。



(2)

交点 $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right), (4, \sqrt{3})$ で円 $f(x, y)$ に接する直線の方程式は、円の接線の公式より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{20}{19}-3\right)(x-3) + \frac{5\sqrt{3}}{19}y &= 4 \\ \therefore 37x - 5\sqrt{3}y &= 35 \\ (4-3)(x-3) + \sqrt{3}y &= 4 \\ \therefore x + \sqrt{3}y &= 7 \end{aligned}$$

となる。

(答) $37x - 5\sqrt{3}y = 35, x + \sqrt{3}y = 7$

(3)

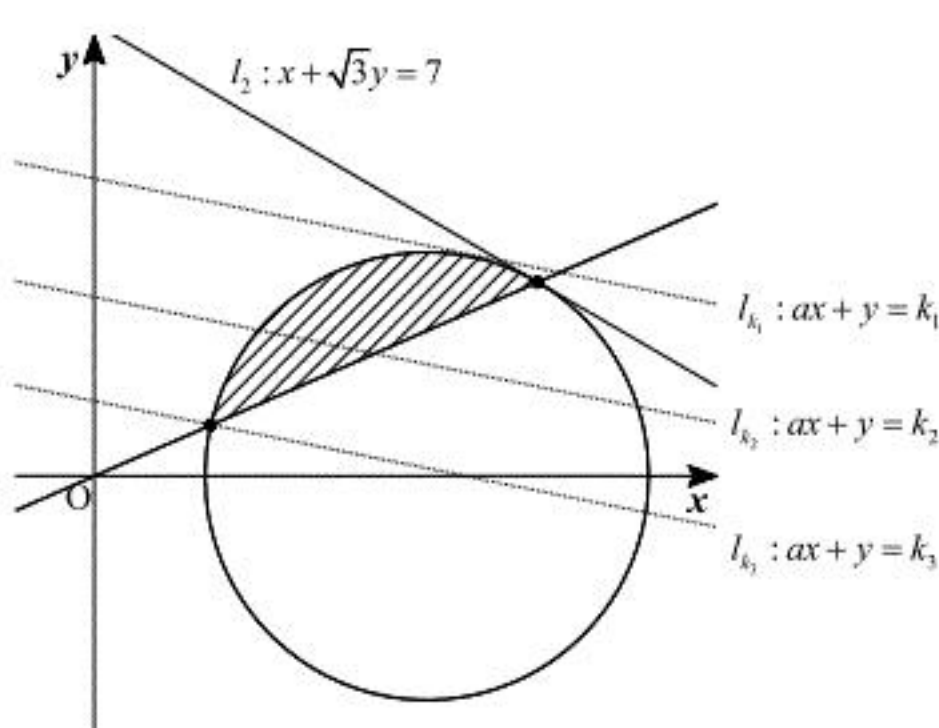
それぞれの直線について、

$$\begin{aligned} l_1 : 37x - 5\sqrt{3}y &= 35 \\ l_2 : x + \sqrt{3}y &= 7 \\ l_k : ax + y &= k \end{aligned}$$

とおく。直線 l_k と領域 D が共有点をもつときの、 k の最大値、最小値を求めればよい。ここで、 a の値によって、以下のように場合分けを行う。

[1] $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

このとき、グラフの概要は以下ようになる。



上図より、 $k = k_1$ のときに最大値となり、このとき、直線 l_{k_1} と円 $f(x, y)$ は接する。よって、円 $f(x, y)$ の中心から直線 l_{k_1} までの距離は、円 $f(x, y)$ の半径と等しくなり、直線と距離の公式より、

$$\begin{aligned} \frac{|3a - k_1|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= 2 \\ \Leftrightarrow k_1 &= 3a \pm 2\sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。ここで、点 $(3, 0)$ は $ax + y < k_1$ を満たすため、

$$3a < k_1$$

が成り立ち、以上より、このときの k の最大値は、

$$k = k_1 = 3a + 2\sqrt{a^2 + 1}$$

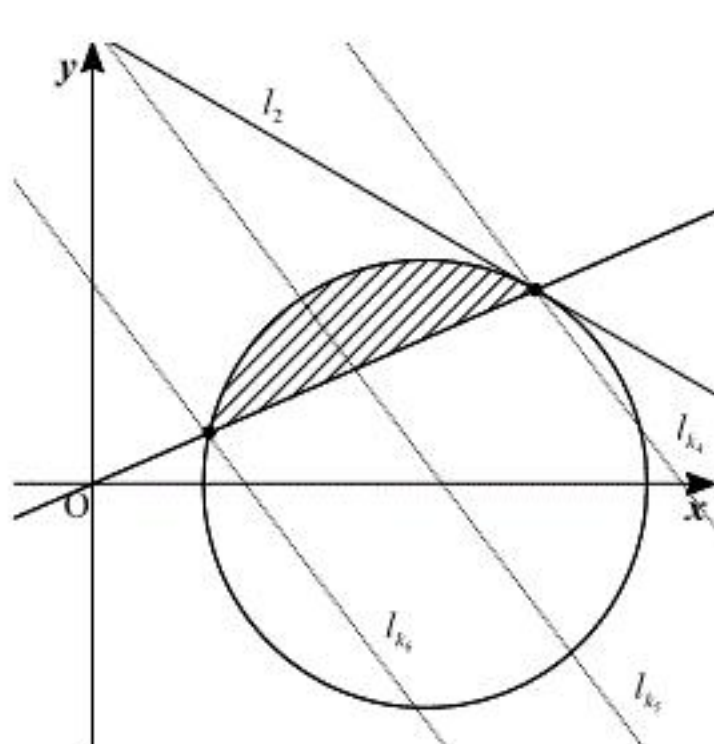
である。また、上図より、 $k = k_3$ のときに最小値となるため、このときの k の最小値は

$$k = k_3 = \frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19}$$

である。

[2] $\frac{1}{\sqrt{3}} < a$ のとき

このとき、グラフの概要は以下ようになる。

上図より、 $k = k_4$ のときに最大値となるため、このときの k の最大値は、

$$k = k_4 = 4a + \sqrt{3}$$

である。また、 $k = k_6$ のときに最小値となるため、このときの k の最小値は

$$k = k_6 = \frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19}$$

である。

以上、[1], [2]より、 $ax + y$ の最大値、最小値は、

$$\begin{aligned} \text{最大値: } &\begin{cases} 3a + 2\sqrt{a^2 + 1} & (0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}) \\ 4a + \sqrt{3} & (\frac{1}{\sqrt{3}} < a \text{ のとき}) \end{cases} \\ \text{最小値: } &\frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19} \end{aligned}$$

となる。

(答) 前表

(1)

放物線 C, D の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}
 x^2 &= -x^2 + 2x + 4 \\
 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) &= 0 \\
 \therefore x &= -1, 2
 \end{aligned}$$

となるため、 C と D は異なる 2 点で交わり、その x 座標は、 $x = -1, 2$ である。(答) $x = -1, 2$

(2)

放物線 D について、

$$y' = -2x + 2$$

であるため、直線 l の方程式は、接線の公式より、

$$\begin{aligned}
 y - (-t^2 + 2t + 4) &= (-2t + 2)(x - t) \\
 \therefore y &= (-2t + 2)x + t^2 + 4
 \end{aligned}$$

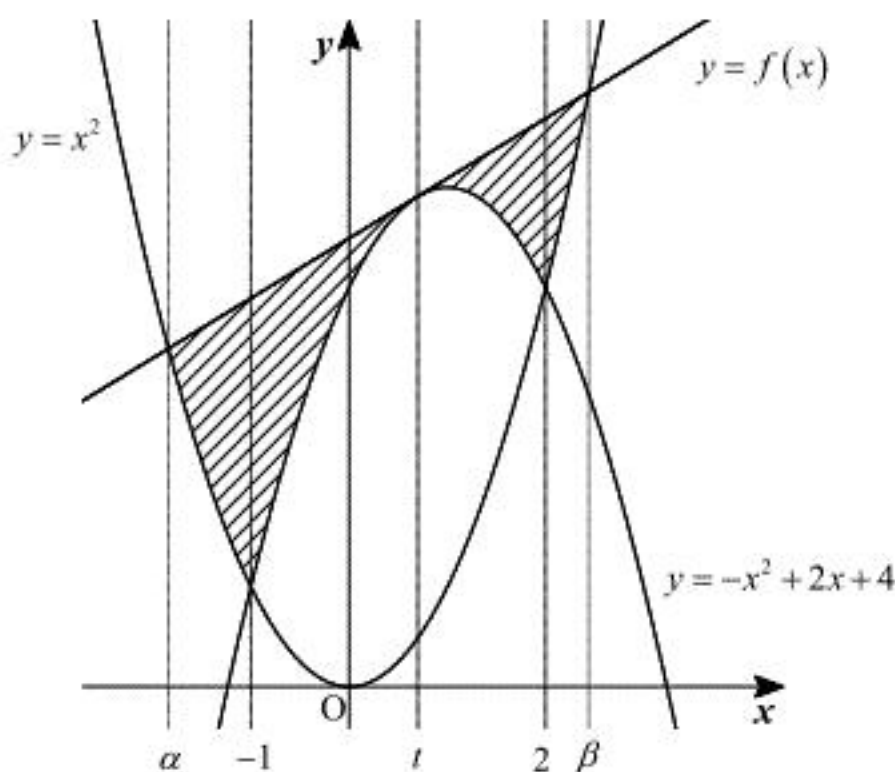
となる。よって、

$$f(x) = (-2t + 2)x + t^2 + 4$$

である。

(答) $f(x) = (-2t + 2)x + t^2 + 4$

(3)

与えられた連立不等式より、 $S(t)$ は以下の斜線部分となる。上図のように、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = f(x)$ の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおく。求める面積 $S(t)$ は、上図より、

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - x^2\} dx - \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2x + 4) - x^2\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} -(x - \alpha)(x - \beta) dx - \int_{-1}^2 -2(x + 1)(x - 2) dx \\
 &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} - 2 \cdot \frac{(2 + 1)^3}{6} \\
 &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 - 9
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 x^2 &= f(x) \\
 \Leftrightarrow x^2 &= (-2t + 2)x + t^2 + 4 \\
 \Leftrightarrow x^2 - (-2t + 2)x - (t^2 + 4) &= 0
 \end{aligned}$$

であり、解の公式より、

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (-t + 1) - \sqrt{(-t + 1)^2 + (t^2 + 4)} \\
 \beta &= (-t + 1) + \sqrt{(-t + 1)^2 + (t^2 + 4)}
 \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned}
 \beta - \alpha &= 2\sqrt{(-t + 1)^2 + (t^2 + 4)} \\
 &= 2\sqrt{2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}
 \end{aligned}$$

である。以上より、 $t = \frac{1}{2}$ のとき、 $\beta - \alpha$ は最小値 $3\sqrt{2}$ をとり、このとき $S(t)$ は最小値、

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \frac{1}{6} \cdot (3\sqrt{2})^3 - 9 \\
 &= 9\sqrt{2} - 9
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $t = \frac{1}{2}$ のとき、最小値 $9\sqrt{2} - 9$