

(1)

点Pが、1回目にaで動き、2回目にbで動くとき、 $[a, b]$ のように表すとする。さいころを2回投げたときにPが点 $(1, 0)$ に動くのは、

$$[c, a] \text{ または } [b, c]$$

のときである。よって、このときの確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{36}$$

(2)

aを1回行うと、点Pの x 座標が1足され、点Pの x, y 座標の和も1増える。bを1回行うと、点Pの y 座標が1足され、点Pの x, y 座標の和も1増える。cを1回行うと、点Pの x 座標、 y 座標が交換されるだけで、点Pの x, y 座標の和に変化はない。したがって、点Pの x, y 座標の和は、1回の操作で高々1しか増えない。点 $(2, 3)$ の x, y 座標の和は $2+3=5$ であるため、さいころを5回投げたときにPが点 $(2, 3)$ に動くのは、aを2回、bを3回行うときである。よって、求める確率は

$${}_5C_2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{5}{54}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{54}$$

(3)

さいころを5回投げたときにPが直線 $x=4$ 上の点に動く確率は、(2)で述べたことにも注意すると、さいころを5回投げたときにPが点 $(4, 0), (4, 1)$ に動く確率に等しい。以下、Pの動く点によって場合分けを行う。

[1] 点 $(4, 0)$ に動くとき

このとき、cを1回行うことが必要であり、何回目にcを行うかによって、

$$[c, a, a, a, a], [b, c, a, a, a], [b, b, c, a, a], [b, b, b, c, a], [b, b, b, b, c]$$

の5通りが考えられる。この中で、 k 回目にcを行うときの確率は、

$$\left(\frac{2}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{5-k}$$

となるため、点 $(4, 0)$ に動く確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \left\{ \left(\frac{2}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{5-k} \right\} &= \frac{1}{6^5} \sum_{k=1}^5 2^{k-1} \cdot 3^{5-k} \\ &= \frac{1}{7776} \cdot (81+54+36+24+16) \\ &= \frac{211}{7776} \end{aligned}$$

となる。

[2] 点 $(4, 1)$ に動くとき

このとき、aを4回、bを1回行うことが必要であるため、点 $(4, 1)$ に動く確率は、

$${}_5C_4 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^4 \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{48}$$

となる。

以上、[1], [2]より、さいころを5回投げたときにPが直線 $x=4$ 上の点に動く確率は、

$$\frac{211}{7776} + \frac{5}{48} = \frac{1021}{7776}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1021}{7776}$$

(1)

与式より、連立不等式は、

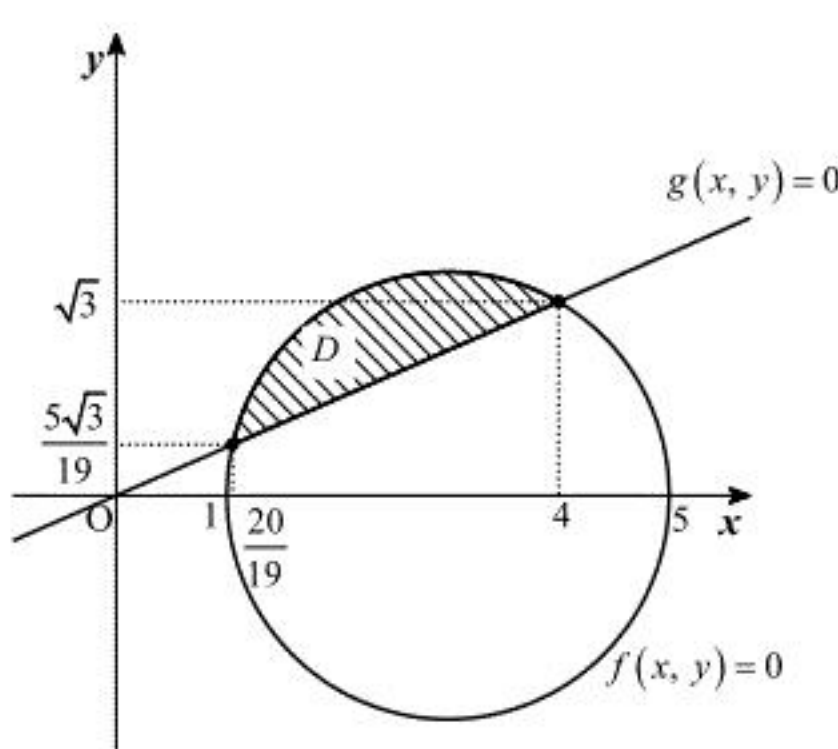
$$\begin{cases} f(x, y) \leq 0 \\ g(x, y) \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{4}x \end{cases}$$

となる。ここで、円 $f(x, y) = 0$ と直線 $g(x, y) = 0$ の交点の座標を求める。 $f(x, y) = 0$ に

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{4}x \text{ を代入すると、}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 19x^2 - 96x + 80 &= 0 \\ \Leftrightarrow 19\left(x - \frac{20}{19}\right)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{20}{19}, 4 \end{aligned}$$

となる。また、 $g(x, y) = 0$ より、交点の座標は $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right), (4, \sqrt{3})$ である。以上より、求める領域 D は以下の図の斜線部のようになる。ただし、境界部分は含む。



(答) 前図

(2)

円の接線の公式より、交点 $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right)$ で円 $f(x, y)$ に接する直線の方程式は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{20}{19} - 3\right)(x-3) + \frac{5\sqrt{3}}{19}y &= 4 \\ \Leftrightarrow 37x - 5\sqrt{3}y &= 35 \end{aligned}$$

となる。また、交点 $(4, \sqrt{3})$ で円 $f(x, y)$ に接する直線の方程式は、

$$\begin{aligned} (4-3)(x-3) + \sqrt{3}y &= 4 \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y &= 7 \end{aligned}$$

となる。

(答) $37x - 5\sqrt{3}y = 35, x + \sqrt{3}y = 7$

(3)

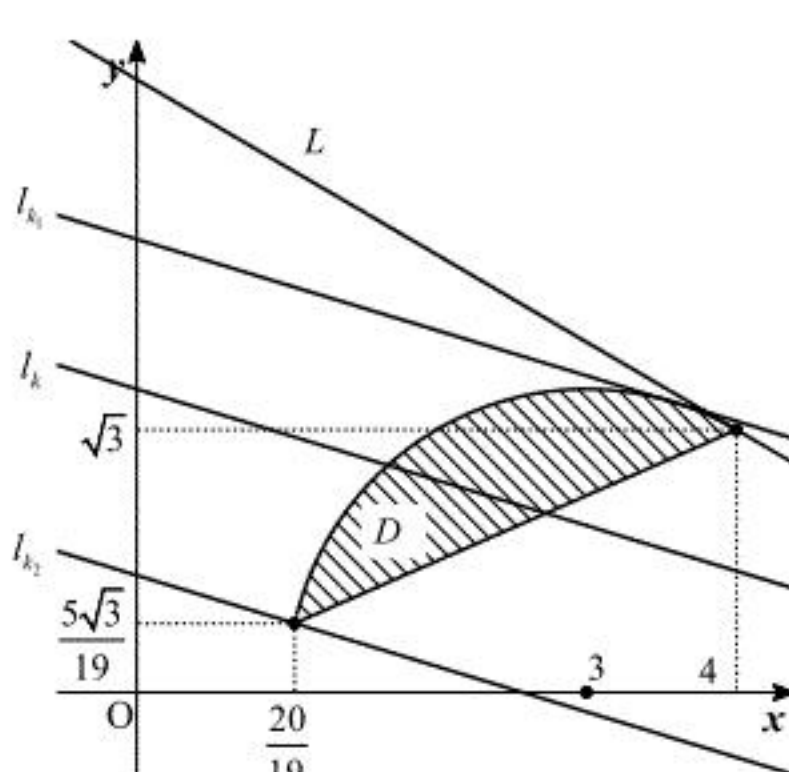
$$L: x + \sqrt{3}y = 7$$

$$l_k: ax + y = k$$

とおく。このとき、図形 l_k は傾きが $-a$ 、 y 切片が k の直線であり、直線 l_k と領域 D が共有点をもつときの k の最大値、最小値を求めればよい。ここで、直線 L の傾きが $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ であることにより、 a の値によって以下のように場合分けを行う。

[1] $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

直線 l_k が領域 D の円 $f(x, y) = 0$ の部分と接するときの k の値を k_1 、点 $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right)$ を通るとき k の値を k_2 とする。このとき、領域 D と直線 l_k, l_{k_1}, l_{k_2}, L の位置関係は以下の図のようになる。



直線 l_{k_1} と円 $f(x, y)$ は接するため、円 $f(x, y)$ の中心 $(3, 0)$ から直線 l_{k_1} までの距離は円 $f(x, y)$ の半径と等しくなる。よって、直線と点の距離の公式より、

$$\begin{aligned} \frac{|3a + 0 - k_1|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= 2 \\ \Leftrightarrow k_1 &= 3a \pm 2\sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。ここで、点 $(3, 0)$ は $ax + y < k_1$ を満たすため、 $3a < k_1$ が成り立つ。よって、

$$k_1 = 3a + 2\sqrt{a^2 + 1}$$

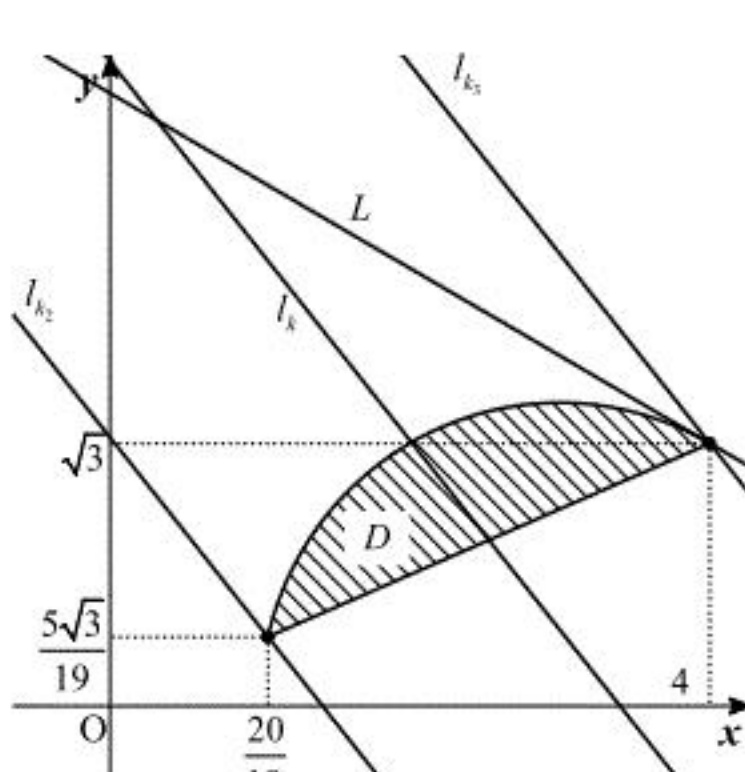
となる。また、直線 l_{k_2} は点 $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right)$ を通るため、

$$k_2 = \frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19}$$

となる。上図より、 $k = k_1$ のときに最大値となり、 $k = k_2$ のときに最小値となる。

[2] $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

直線 l_k が点 $(4, \sqrt{3})$ を通るとき k の値を k_3 とする。このとき、領域 D と直線 l_k, l_{k_2}, l_{k_3}, L の位置関係は以下の図のようになる。



[1]より、 $k_2 = \frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19}$ となり、また、直線 l_{k_3} は点 $(4, \sqrt{3})$ を通るため、

$$k_3 = 4a + \sqrt{3}$$

となる。上図より、 $k = k_3$ のときに最大値となり、 $k = k_2$ のときに最小値となる。

以上、[1], [2]より、 $ax + y$ の最大値、最小値は、

$$\begin{aligned} \text{最大値: } & \begin{cases} 3a + 2\sqrt{a^2 + 1} & (0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}) \\ 4a + \sqrt{3} & (a > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}) \end{cases} \\ \text{最小値: } & \frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19} \end{aligned}$$

となる。

(答) 前述

(1)

放物線 C, D の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^2 &= -x^2 + 2x + 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 2 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、 C と D は異なる 2 点で交わり、その x 座標は、 $x = -1, 2$ である。

(答) $x = -1, 2$

(2)

放物線 D について,

$$y' = -2x + 2$$

であるため、接線の公式より、接線 l の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= (-2t+2)(x-t) + (-t^2+2t+4) \\ \Leftrightarrow y &= -2(t-1)x + t^2 + 4 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$f(x) = -2(t-1)x + t^2 + 4$$

である。

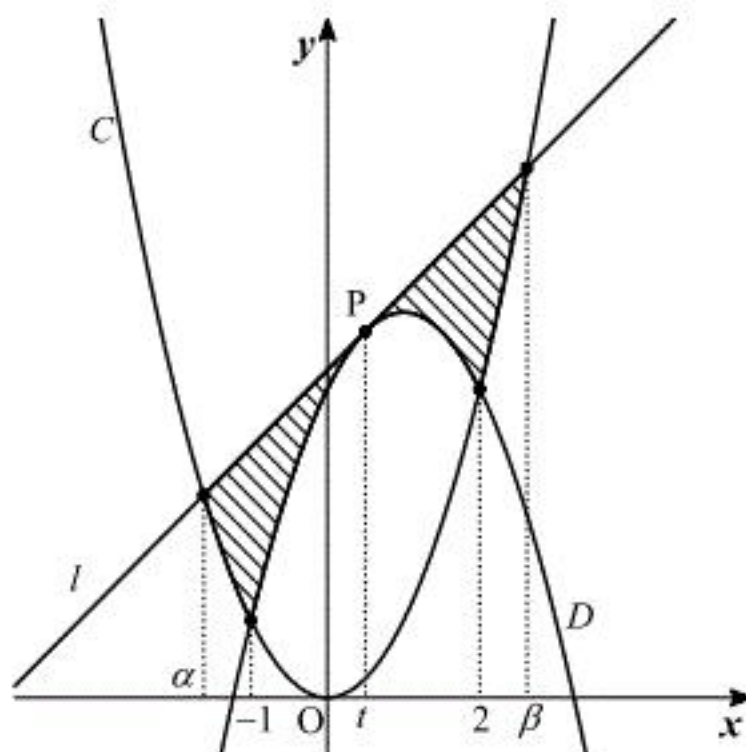
(答) $f(x) = -2(t-1)x + t^2 + 4$

(3)

(1)より、 $a = -1, b = 2, -1 < t < 2$ である。また、連立不等式

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq f(x) \\ y \geq -x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$

の表す領域は以下の図の斜線部分となる。ただし、境界線を含む。



放物線 C と直線 l の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおく。上図より、求める面積 $S(t)$ は,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - x^2\} dx - \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2x + 4) - x^2\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx - \left\{ -2 \int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx \right\} \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}(2+1)^3 \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 - 9 \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} x^2 &= f(x) \\ \Leftrightarrow x^2 &= -2(t-1)x + t^2 + 4 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2(t-1)x - (t^2 + 4) &= 0 \end{aligned}$$

であり、この 2 次方程式の解は $x = \alpha, \beta$ である。よって、解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2(t-1) \\ \alpha\beta = -(t^2 + 4) \end{cases}$$

となるため,

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \quad (\because \alpha < \beta) \\ &= \sqrt{\{-2(t-1)\}^2 - 4 \cdot \{-(t^2 + 4)\}} \\ &= \sqrt{8t^2 - 8t + 20} \\ &= \sqrt{8\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 18} \end{aligned}$$

である。ゆえに,

$$S(t) = \frac{1}{6} \left(8 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + 18 \right)^{\frac{3}{2}} - 9$$

となる。 $-1 < t < 2$ より、 $S(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ のとき、最小値

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6} \cdot 18^{\frac{3}{2}} - 9 \\ &= 9\sqrt{2} - 9 \end{aligned}$$

となる。

(答) $t = \frac{1}{2}$ のとき、最小値 $9\sqrt{2} - 9$