

(1)

点Pが、1回目にaで動き、2回目にbで動くとき、(a, b)のように表すとする。さいころを2回投げたときにPが点(1, 0)に動くのは、

(c, a)または(b, c)

のときである。よって、このときの確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$$

となる。

(答) $\frac{5}{36}$

(2)

aを1回行くと、点Pのx座標が1足され、点Pのx, y座標の和も1増える。bを1回行くと、点Pのy座標が1足され、点Pのx, y座標の和も1増える。cを1回行くと、点Pのx座標, y座標が交換されるだけで、点Pのx, y座標の和に変化はない。したがって、点Pのx, y座標の和は、1回の操作で高々1しか増えない。よって、点(2, 3)のx, y座標の和は2+3=5より、さいころを5回投げたときにPが点(2, 3)に動くのは、aを2回、bを3回行ふときの確率であるため、

$${}_5C_2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{5}{54}$$

となる。

(答) $\frac{5}{54}$

(3)

さいころを5回投げたときにPが直線 $x=4$ 上の点に動く確率は、(2)で述べたことにも注意すると、さいころを5回投げたときにPが点(4, 0), (4, 1)に動く確率に等しい。以下、Pの動く点の位置によって場合分けを行う。

[1] 点(4, 0)に動くとき

このとき、cを1回行ふことが必要であり、何回目にcを行ふかによって、

(c, a, a, a, a), (b, c, a, a, a), (b, b, c, a, a), (b, b, b, c, a), (b, b, b, b, c)

の5通りが考えられる。よって、このときの確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 \left(\frac{2}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{4-k} &= \frac{1}{6^5} \sum_{k=0}^4 2^k \cdot 3^{4-k} \\ &= \frac{1}{7776} (81+54+36+24+16) \\ &= \frac{211}{7776} \end{aligned}$$

となる。

[2] 点(4, 1)に動くとき

このとき、aを4回、bを1回行ふことが必要であるため、このときの確率は、

$${}_5C_4 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{810}{7776}$$

となる。

以上、[1], [2]より、さいころを5回投げたときにPが直線 $x=4$ 上の点に動く確率は、

$$\frac{211}{7776} + \frac{810}{7776} = \frac{1021}{7776}$$

である。

(答) $\frac{1021}{7776}$

2

(1)

与式より，連立不等式は，

$$f(x, y) \leq 0, g(x, y) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 \leq 4, \frac{\sqrt{3}}{4}x \leq y$$

となる。また， $f(x, y), g(x, y)$ の交点は，

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

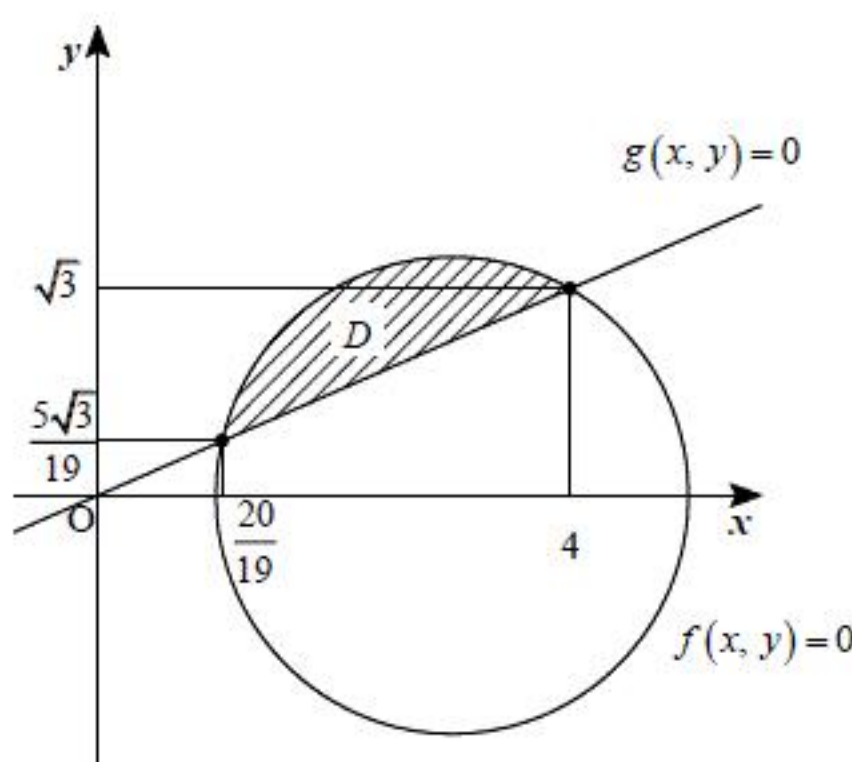
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 19x^2 - 96x + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow (19x-20)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = \frac{20}{19}, 4$$

より，点 $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right), (4, \sqrt{3})$ である。以上より，求める領域 D は以下の斜線部となる。ただし，境界部分は含む。



(答) 前図

(2)

交点 $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right), (4, \sqrt{3})$ で円 $f(x, y)$ に接する直線の方程式は，円の接線の公式より，

$$\left(\frac{20}{19}-3\right)(x-3) + \frac{5\sqrt{3}}{19}y = 4$$

$$\therefore 37x - 5\sqrt{3}y = 35$$

$$(4-3)(x-3) + \sqrt{3}y = 4$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y = 7$$

となる。

(答), $37x - 5\sqrt{3}y = 35, x + \sqrt{3}y = 7$

(3)

それぞれの直線について，

$$l_1: 37x - 5\sqrt{3}y = 35$$

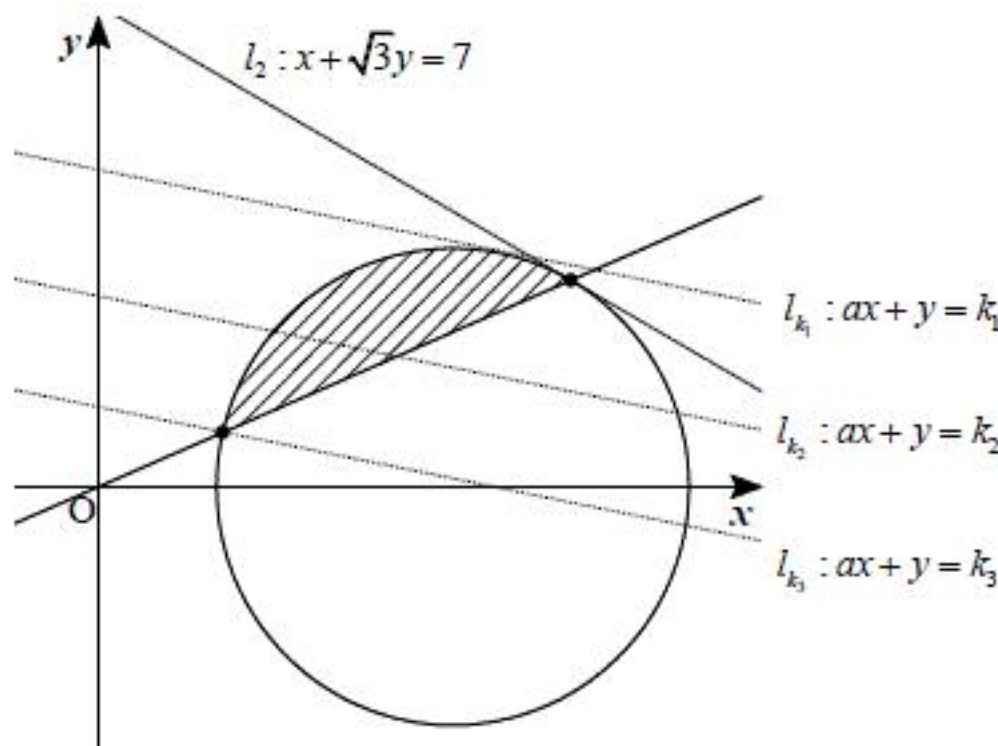
$$l_2: x + \sqrt{3}y = 7$$

$$l_k: ax + y = k$$

とおく。直線 l_k と領域 D が共有点をもつときの， k の最大値，最小値を求めればよい。ここで， a の値によって，以下のように場合分けを行う。

[1] $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

このとき，グラフの概要は以下になる。



上図より， $k = k_1$ のときに最大値となり，このとき，直線 l_{k_1} と円 $f(x, y)$ は接する。よって，円 $f(x, y)$ の中心から直線 l_{k_1} までの距離は，円 $f(x, y)$ の半径と等しくなり，直線と

距離の公式より，

$$\frac{|3a - k_1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 3a \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

となる。ここで，点 $(3, 0)$ は $ax + y < k_1$ を満たすため，

$$3a < k_1$$

が成り立ち，以上より，このときの k の最大値は，

$$k = k_1 = 3a + \sqrt{a^2 + 1}$$

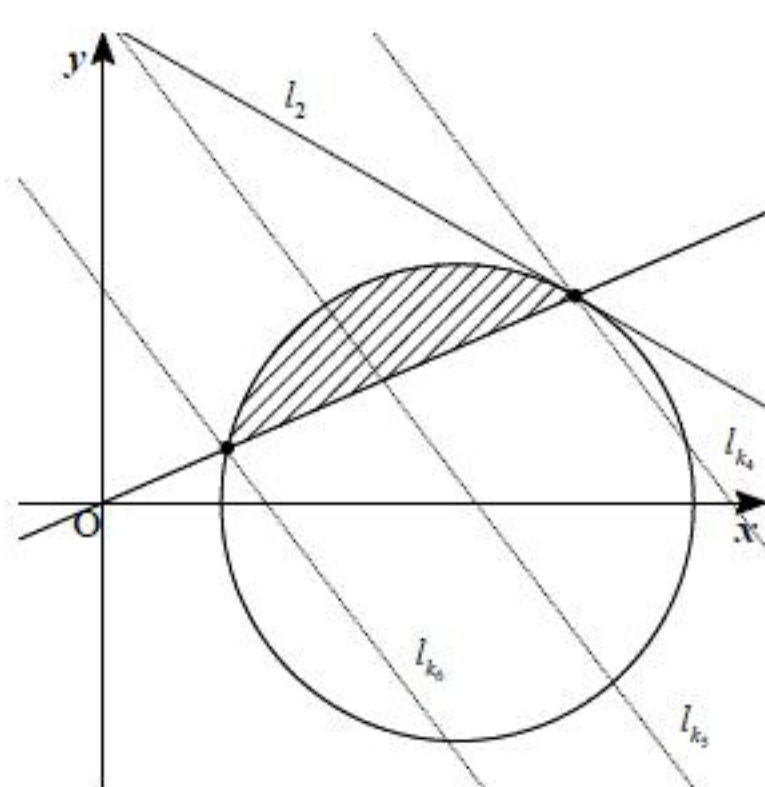
である。また，上図より， $k = k_3$ のときに最小値となるため，このときの k の最小値は

$$k = k_3 = \frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19}$$

である。

[2] $\frac{1}{\sqrt{3}} < a$ のとき

このとき，グラフの概要は以下になる。



上図より， $k = k_4$ のときに最大値となるため，このときの k の最大値は，

$$k = k_4 = 4a + \sqrt{3}$$

である。また， $k = k_6$ のときに最小値となるため，このときの k の最小値は

$$k = k_6 = \frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19}$$

である。

以上，[1], [2]より， $ax + y$ の最大値，最小値は，

$$\begin{aligned} \text{最大値: } & \begin{cases} 3a + 2\sqrt{a^2 + 1} & (0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}) \\ 4a + \sqrt{3} & (\frac{1}{\sqrt{3}} < a \text{ のとき}) \end{cases} \\ \text{最小値: } & \frac{20}{19}a + \frac{5\sqrt{3}}{19} \end{aligned}$$

となる。

(答) 前表

3

(1)

関数 y について、

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2}$$

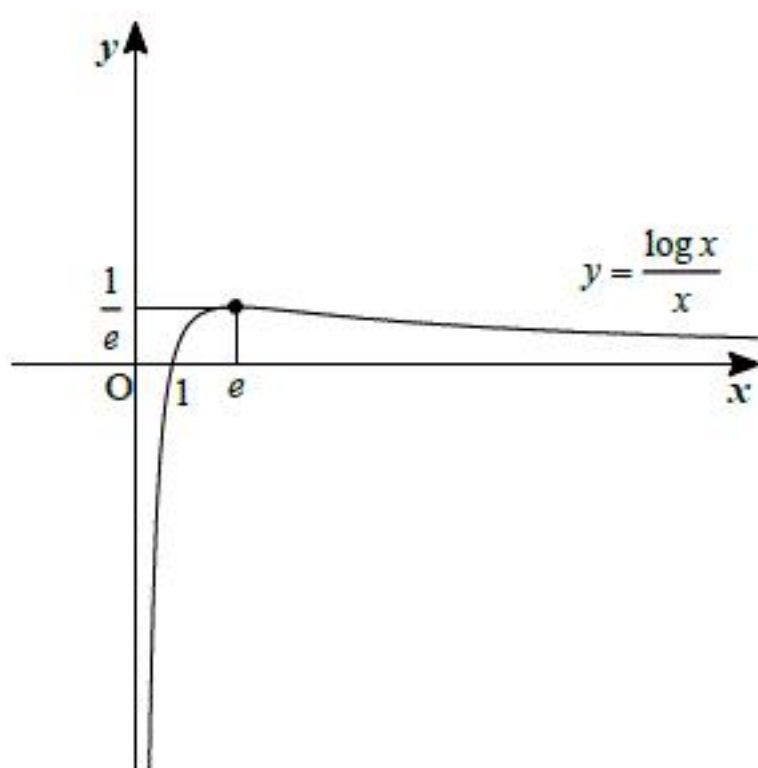
$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

であり、 $x=e$ のとき、 $y'=0$ となるため、増減表は以下のようになる。ただし、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$$

より、 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$ である。

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
y'		$+$	0	$-$	
y	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

よって、上の増減表より、関数 $y = \frac{\log x}{x}$ の概形は以下のようになる。

(答) 前図

(2)

与式を変形すると、

$$m^n = n^m$$

$$\Leftrightarrow n \log m = m \log n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log m}{m} = \frac{\log n}{n}$$

となる。ここで、 $2 < e < 3$ であり、(1)のグラフより、上方程式を満たす自然数は、2 だけであることが分かる。 $m=2$ とすると、

$$2^n = n^2$$

となり、 $n=4$ である。以上より、求める自然数 m, n の組は、

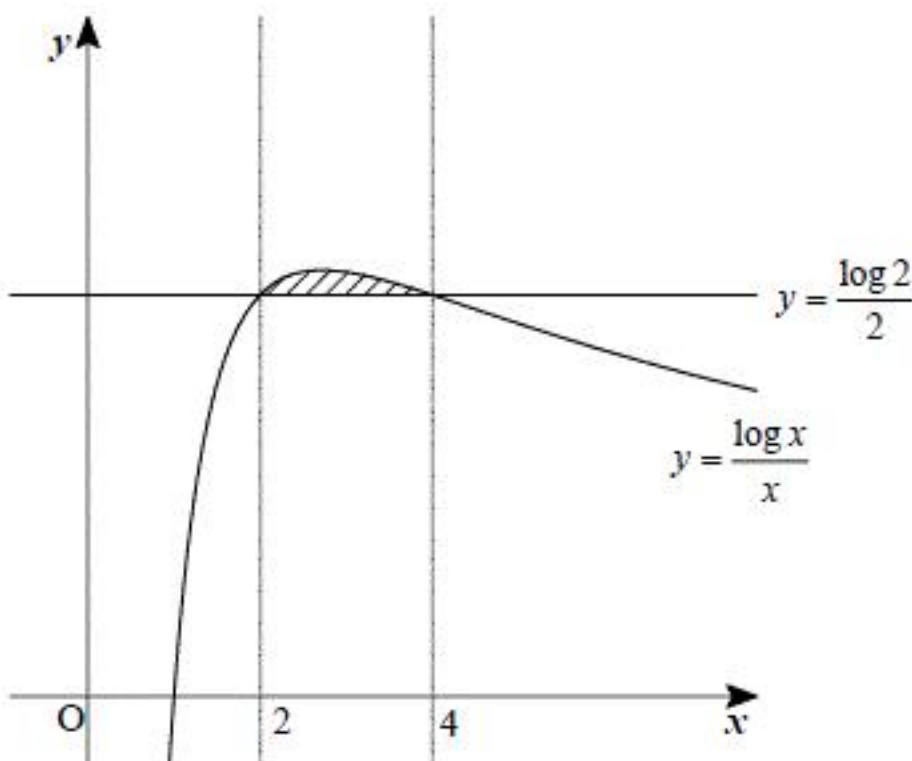
$$(m, n) = (2, 4), (4, 2)$$

である。

(答) $(m, n) = (2, 4), (4, 2)$

(3)

(2)より、求める面積は下図の斜線部となる。

上図より、求める面積 S は、

$$S = \int_2^4 \left(\frac{\log x}{x} - \frac{\log 2}{2} \right) dx$$

$$= \int_2^4 \frac{\log x}{x} dx - \left[\frac{\log 2}{2} x \right]_2^4$$

$$= \int_2^4 \frac{\log x}{x} dx - \log 2$$

となる。ここで、 $u = \log x$ とおくと、

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore dx = x du$$

x	2	$\rightarrow$	4
u	$\log 2$	$\rightarrow$	$2 \log 2$

であり、置換積分を用いて、

$$S = \int_2^4 \frac{\log x}{x} dx - \log 2$$

$$= \int_{\log 2}^{2 \log 2} \frac{u}{x} \cdot x du - \log 2$$

$$= \int_{\log 2}^{2 \log 2} u du - \log 2$$

$$= \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_{\log 2}^{2 \log 2} - \log 2$$

$$= \frac{3}{2} (\log 2)^2 - \log 2$$

となる。

(答) $\frac{3}{2} (\log 2)^2 - \log 2$