

(1)

行列 A が $ad - bc = 0$ を満たすとき、 a の値によって、以下のように場合分けを行う。

[1] $a \neq 0$ のとき

このとき、

$$ad - bc = 0$$

$$\therefore d = \frac{bc}{a}$$

であり、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

となるため、

$$A = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

と表せる。

[2] $a = 0$ のとき

このとき、

$$ad - bc = 0$$

$$\therefore bc = 0$$

となる。 $b = 0$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

と表すことができ、 $c = 0$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表せる。

以上、[1], [2]より、行列 A が $ad - bc = 0$ を満たすとき、

$$A = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix}$$

となるような実数 p, q, r, s が存在する。

(証明終)

(2)

$$XA \neq O, AY \neq O, XAY = O$$

が成立するとき、

$$ad - bc = 0$$

が成り立つと仮定する。このとき、(1)より、

$$A = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix}$$

とおくことができ、

$$XAY = O$$

$$\Leftrightarrow X \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} Y = O$$

となる。ここで、 X, Y は 2 次の正方行列であるため、

$$X \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} r' & s' \end{pmatrix}$$

と表すことができ、

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' & s' \end{pmatrix} = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'r' & p's' \\ q'r' & q's' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。以下、 p', q', r', s' の値によって場合分けを行う。

[1] $p' \neq 0$ または $q' \neq 0$ のとき

このとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$r' = 0, s' = 0$$

である。よって、

$$\begin{aligned} AY &= \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} Y \\ &= \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' & s' \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

となり、仮定に反するため、不適である。

[2] $p' = 0$ かつ $q' = 0$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} XA &= X \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

となり、仮定に反するため、不適である。

以上、[1], [2]より、仮定は矛盾するため、

$$XA \neq O, AY \neq O, XAY = O$$

が成立するとき、

$$ad - bc \neq 0$$

である。

(証明終)

(1)

$$f(x) = x - \sin x$$

$$g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$$

とおく。それぞれの導関数は、

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

であり、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲では、それぞれの増減表は以下のようになる。ただし、

$$\cos \alpha = \frac{2}{\pi} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \text{である。}$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - 1$

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	$1 - \frac{2}{\pi}$	+	0	-	$-\frac{2}{\pi}$
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

上の増減表より、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲では、常に $f(x), g(x) \geq 0$ が成り立つため、

$$0 \leq f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x \leq x$$

$$0 \leq g(x)$$

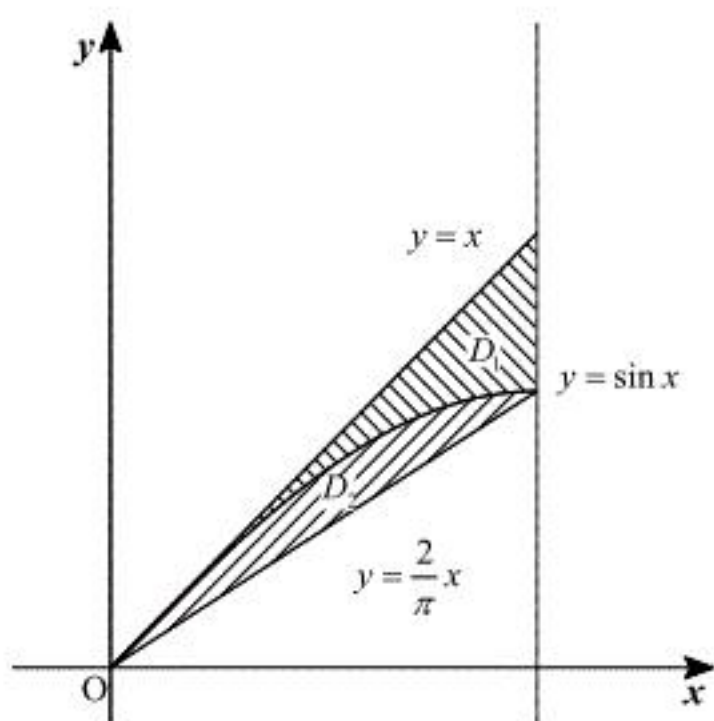
$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}x \leq \sin x$$

となり、 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ が示せた。

(証明終)

(2)

グラフの概形は以下のようになる。



上図より、 D_1 の面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - 1 \end{aligned}$$

であり、 D_2 の面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx &= \left[-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\pi > 3.14$ より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} - 2 \\ &= \frac{1}{8}(\pi^2 + 2\pi - 16) \\ &> \frac{1}{8}(9.8596 + 6.28 - 16) \\ &= \frac{1}{8} \cdot 0.1396 \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{8} - 1 > 1 - \frac{\pi}{4}$$

となるため、 D_1 の方が面積は大きい。

(答) $D_1 : \frac{\pi^2}{8} - 1, D_2 : 1 - \frac{\pi}{4}$, D_1 の方が大きい

(3)

(2)のグラフより、 D_2 を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - 1 \cdot 1 \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi^2}{12}$

(1)

$l \leq m \leq n$ としても一般性を失わない。このとき、

$$3l \leq l+m+n=10$$

より、 $l=1, 2, 3$ である。以下、 l の値によって場合分けを行う。

[1] $l=1$ のとき

このとき、

$$m+n=9$$

であり、 $m \leq n$ より、 $m=1, 2, 3, 4$ となる。よって、

$$(l, m, n) = (1, 1, 8), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5)$$

$$f(l, m, n) = \frac{17}{8}, \frac{23}{14}, \frac{3}{2}, \frac{29}{20}$$

となるから、このときの最大値は $\frac{17}{8}$ 、最小値は $\frac{29}{20}$ である。

[2] $l=2$ のとき

このとき、

$$m+n=8$$

であり、 $m \leq n$ より、 $m=2, 3, 4$ となる。よって、

$$(l, m, n) = (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4)$$

$$f(l, m, n) = \frac{7}{6}, \frac{31}{30}, 1$$

となるから、このときの最大値は $\frac{7}{6}$ 、最小値は1である。

[3] $l=3$ のとき

このとき、

$$m+n=7$$

であり、 $m \leq n$ より、 $m=3$ となる。よって、

$$(l, m, n) = (3, 3, 4)$$

$$f(l, m, n) = \frac{11}{12}$$

となるから、このときの最大値、最小値はともに、 $\frac{11}{12}$ である。

以上、[1], [2], [3]より、 $f(l, m, n)$ の最大値は、 $f(1, 1, 8) = \frac{17}{8}$ 、最小値は、 $f(3, 3, 4) = \frac{11}{12}$ であ

る。

(答) 最大値： $\frac{17}{8}$ ，最小値： $\frac{11}{12}$

(2)

仮に、 $a=1$ とする。このとき、

$$f(l, m, n) = 1$$

となり、

$$f(3, 3, 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$f(2, 4, 4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

の2つは、 $l \leq m \leq n$ を満たす。よって、

$$a=1, (l, m, n) = (3, 3, 3), (2, 4, 4)$$

が解となる。

(答) $a=1, (l, m, n) = (3, 3, 3), (2, 4, 4)$

(3)

$l \leq m \leq n$ より、

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{l}$$

である。ここで、

$$\frac{11}{12} < \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

より、

$$\frac{11}{12} < \frac{3}{l}$$

$$\Leftrightarrow l < \frac{36}{11}$$

となるため、 $l=1, 2, 3$ である。以下、 l の値によって場合分けを行う。

[1] $l=1$ のとき

このとき、

$$f(1, m, n) = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$$

となり、条件に合わないため不適である。

[2] $l=2$ のとき

このとき、

$$\frac{11}{12} < \frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{12} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$$

となり、 $m \leq n$ より、

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{m}$$

であるため、

$$\frac{5}{12} < \frac{2}{m}$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{24}{5}$$

$$\therefore m = 2, 3, 4$$

となる。 $m=2$ のとき、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

となり、条件に適さないため不適である。 $m=3$ のとき、

$$\frac{5}{12} < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} < \frac{1}{n} < \frac{1}{6}$$

$$\therefore n = 7, 8, 9, 10, 11$$

となり、これらは条件を満たす。 $m=4$ のとき、

$$\frac{5}{12} < \frac{1}{4} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{n} < \frac{1}{4}$$

$$\therefore n = 5$$

となり、これらは条件を満たす。

[3] $l=3$ のとき

このとき、

$$\frac{11}{12} < \frac{1}{3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{12} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{2}{3}$$

となり、 $m \leq n$ より、

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{m}$$

であるため、

$$\frac{7}{12} < \frac{2}{m}$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{24}{7}$$

$$\therefore m = 3$$

となる。このとき、

$$\frac{7}{12} < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} < \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{n} < \frac{1}{3}$$

となり、これを満たす自然数 n は存在しないから、不適である。

以上、[1], [2], [3]より、条件を満たす自然数 l, m, n の組は、

$$(l, m, n) = (2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 3, 9), (2, 3, 10), (2, 3, 11), (2, 4, 5)$$

である。

(答) $(2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 3, 9), (2, 3, 10), (2, 3, 11), (2, 4, 5)$