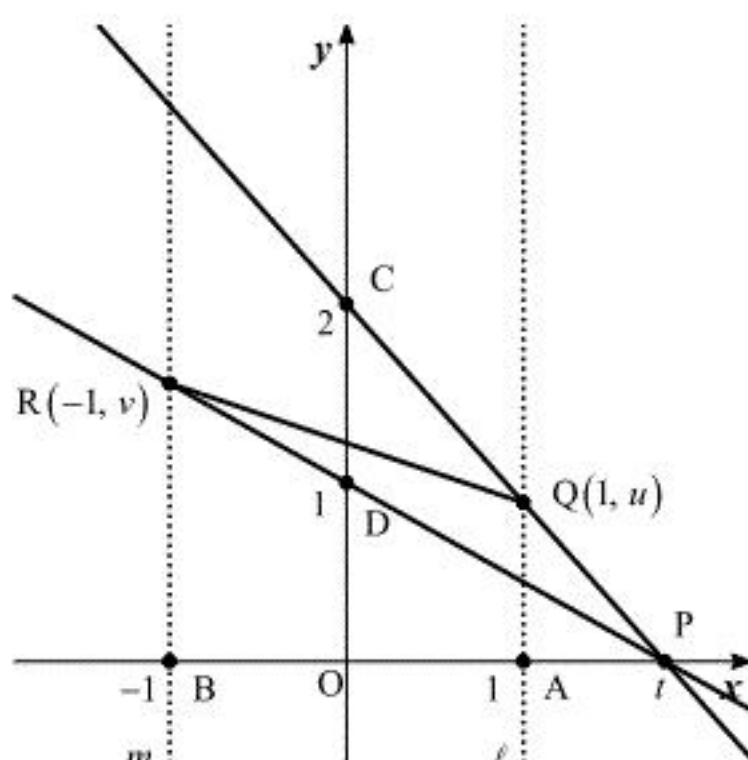


(1)



点 P は原点と異なる点であるから $t \neq 0$ である。したがって直線 CP の方程式は

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

と求められる。点Qは直線CPと $l: x=1$ の交点であるから、直線CPの方程式に $x=1$ を代入して

$$u = -\frac{2}{t} + 2$$

と計算できる。また同様に直線 DP の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

であり、点 R は直線 DP と $m: x = -1$ の交点であるから、直線 DP の方程式に $x = -1$ を代入して

$$v = \frac{1}{\epsilon} + 1$$

と計算できる。

(答) $u = -\frac{2}{t} + 2, v = \frac{1}{t} + 1$

(2)

(1)の結果より

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{t} + 2 > 0 \\ \frac{1}{t} + 1 > 0 \end{cases}$$

とわかる。ここで両辺に $t^2 (> 0)$ をかけると

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -2t + 2t^2 > 0 \\ t + t^2 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2t(t-1) > 0 \\ t(t+1) > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0, 1 < t \\ t < -1, 0 < t \end{cases} \\ & \therefore t < -1, 1 < t \end{aligned}$$

と求められる。この時の台形 QABR の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(AQ + BR) \cdot AB \\ &= \frac{1}{2}(u + v) \cdot 2 \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{t} + 2 + \frac{1}{t} + 1 \right) \cdot 2 \\ &= 3 - \frac{1}{t} \end{aligned}$$

と計算できる。また $t < -1, 1 < t$ から $-1 < -\frac{1}{t} < 0, 0 < -\frac{1}{t} < 1$ とわかるので

$$3-1 < 3-\frac{1}{t} < 3, 3 < 3-\frac{1}{t} < 3+1$$
$$\Leftrightarrow 2 < S < 3, 3 < S < 4$$

と求められる。

(答) t の範囲: $t < -1, 1 < t$
 S の範囲: $2 < S < 3, 3 < S < 4$

(3)

直線 QR の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{v-u}{-1-1}(x-1)+u \\ &= -\frac{\frac{1}{t}+1-\left(-\frac{2}{t}+2\right)}{2}(x-1)-\frac{2}{t}+2 \\ &= -\frac{1}{2t}(3x+1)+\frac{x+3}{2} \end{aligned}$$

と求められる。したがって $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ は l によらない定点であり、 $-1 \leq -\frac{1}{3} \leq 1$ を満たすので

この点は確かに線分 QR 上に存在しこの定点が E である。

(証明終)

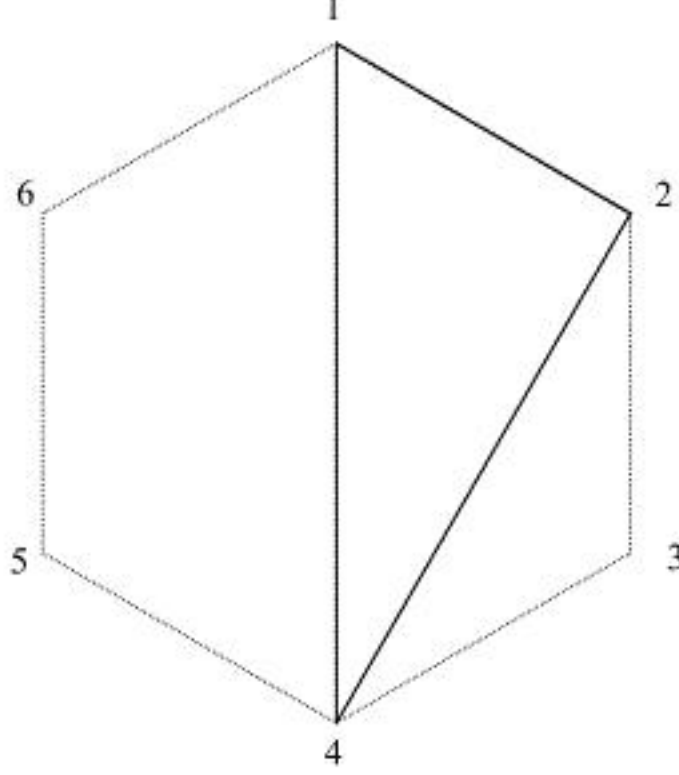
(答) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(1)

正六角形の6つの頂点は1, 2, 3, 4, 5, 6の順に並んでいるものとする。サイコロを3回ふった時の目の出方は全部で 6^3 通りあり、これらは同様に確からしい。頂点 i, j, k が3角形をなすのは i, j, k がすべて異なる場合であるから、 ${}_6P_3$ 通りある。よって、求める確率は

$$\frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

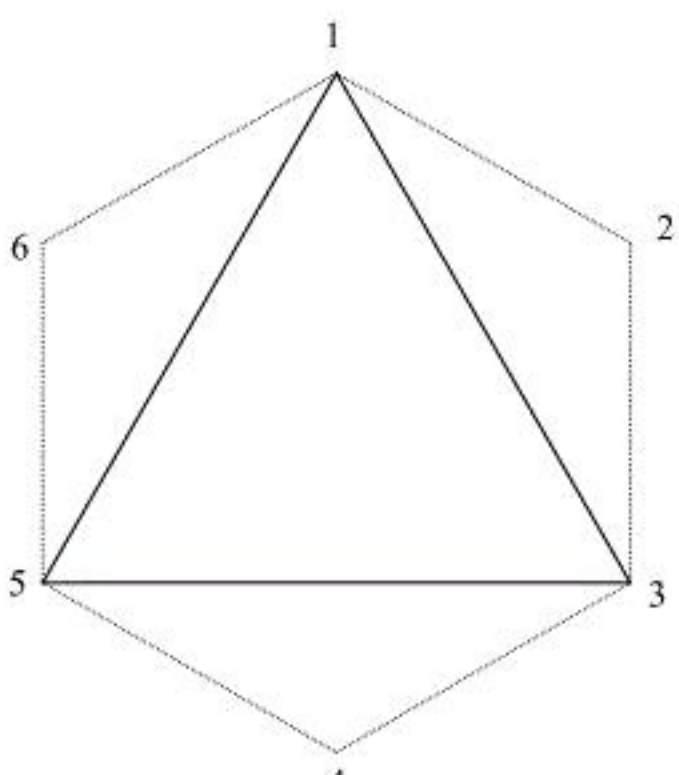
と計算できる。また、頂点 i, j, k が直角3角形をなすのは、3点が下図のようになるときである。



このとき、斜辺が正六角形の中心を通る、すなわち3つの頂点のうち2つが $(1, 4), (2, 5), (3, 6)$ のいずれかになり、残り1点の選び方は4通り、3つの数字の並べ替え方は $3!$ 通りあるので、頂点 i, j, k が直角3角形をなす確率は、

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{3}$$

となる。次に、頂点 i, j, k が鋭角3角形をなすのは、3点が下図のようになるときである。



この3角形の配置の選び方は $(1, 3, 5), (2, 4, 6)$ の2通り、3つの数字の並べ替え方は $3!$ 通りあるので、頂点 i, j, k が鋭角3角形をなす確率は、

$$\frac{2 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{18}$$

となる。そして、頂点 i, j, k が鈍角3角形をなすのは、頂点 i, j, k が3角形をなすが、直角3角形あるいは鋭角3角形とならない場合である。したがって頂点 i, j, k が鈍角3角形をなす確率は、

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$$

となる。

$$\text{3角形をなす確率: } \frac{5}{9}$$

$$\text{直角3角形をなす確率: } \frac{1}{3}$$

(答)

$$\text{鋭角3角形をなす確率: } \frac{1}{18}$$

$$\text{鈍角3角形をなす確率: } \frac{1}{6}$$

(2)

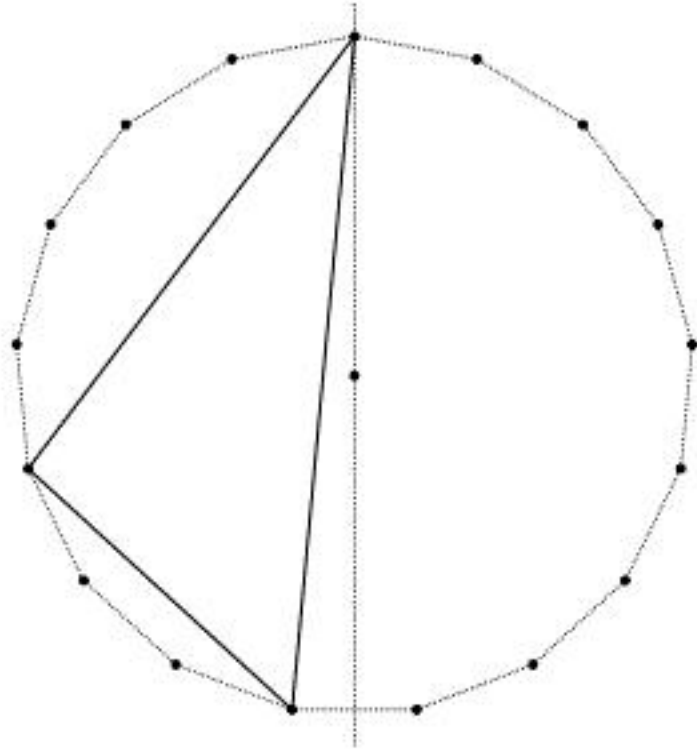
正 n 角形の n 個の頂点は1, 2, 3, ..., n の順に反時計回りに並んでいるものとする。くじを3回引いた時の番号の出方は全部で n^3 通りあり、これらは同様に確からしい。

[1] n が奇数の場合

直角3角形をなすのは3つの頂点のうちいずれか2つの頂点を結んだ線分が正 n 角形の外接円の中心を通るときである。3つの頂点のうちいずれか2つの頂点を結んだ線分が正 n 角形の外接円の中心を通ることはないから、頂点 i, j, k が直角3角形をなす確率は

0である。また、頂点 i, j, k が3角形をなす確率は、 $\frac{3! \cdot {}_nC_3}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$ である。頂点

i, j, k が鋭角3角形をなす確率は(頂点 i, j, k が3角形をなす確率) - (直角3角形をなす確率) - (鈍角3角形をなす確率)であるから、頂点 i, j, k が鈍角3角形をなす確率を考える。鈍角3角形のうち鋭角となる点を固定すると、その他の2点は、下図のように、固定した点と正 n 角形の中心を結ぶ直線に対して同じ側にある。



2点がどちら側にあるかの選び方は2通り、2点の選び方は $\frac{n-1}{2}C_2$ (通り)ある。また、固定する点の選び方は n (通り)あるので、頂点 i, j, k が鈍角3角形をなす確率は、重複を考慮して、

$$\frac{3! \cdot 2 \cdot \frac{n-1}{2}C_2 \cdot n \cdot \frac{1}{2}}{n^3} = \frac{3(n-1)(n-3)}{4n^2}$$

となる。よって、頂点 i, j, k が鋭角3角形をなす確率は、

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} - 0 - \frac{3(n-1)(n-3)}{4n^2} = \frac{n^2-1}{4n^2}$$

となる。

[2] n が偶数の場合

頂点 i, j, k が直角3角形をなすのは、3つの頂点のうちいずれか2つの頂点が $\left(m, m + \frac{n}{2}\right)$ ($m=1, 2, \dots, \frac{n}{2}$)で、残りの1つが m でも $m + \frac{n}{2}$ でもない $n-2$ 個の頂点のいずれかを選ぶときである。したがってこの確率は

$$\frac{\frac{n}{2} \cdot (n-2) \cdot 3!}{n^3} = \frac{3(n-2)}{n^2}$$

と求められる。また、上記と同様に頂点 i, j, k が鈍角3角形をなす確率を考えると、2点がどちら側にあるかの選び方は2通り、2点の選び方は $\frac{n-2}{2}C_2$ (通り)ある。また、固定する点の選び方は n (通り)あるので、頂点 i, j, k が鈍角3角形をなす確率は、重複を考慮して、

$$\frac{3! \cdot 2 \cdot \frac{n-2}{2}C_2 \cdot n \cdot \frac{1}{2}}{n^3} = \frac{3(n-2)(n-4)}{4n^2}$$

となる。よって、頂点 i, j, k が鋭角3角形をなす確率は、

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} - \frac{3(n-2)}{n^2} - \frac{3(n-2)(n-4)}{4n^2} = \frac{(n-2)(n-4)}{4n^2}$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{直角3角形をなす確率: } & \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{3(n-2)}{n^2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \\ \text{鋭角3角形をなす確率: } & \begin{cases} \frac{n^2-1}{4n^2} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{(n-2)(n-4)}{4n^2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

(答)

(1)

$y = \log x$ について $y' = \frac{1}{x}$ である。したがって、 $x = t$ ($t > 0$) における C の接線は

$$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$$

$$\therefore y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

となる。これが点 $(a, 0)$ を通るとき、

$$0 = \frac{1}{t} \cdot a + \log t - 1$$

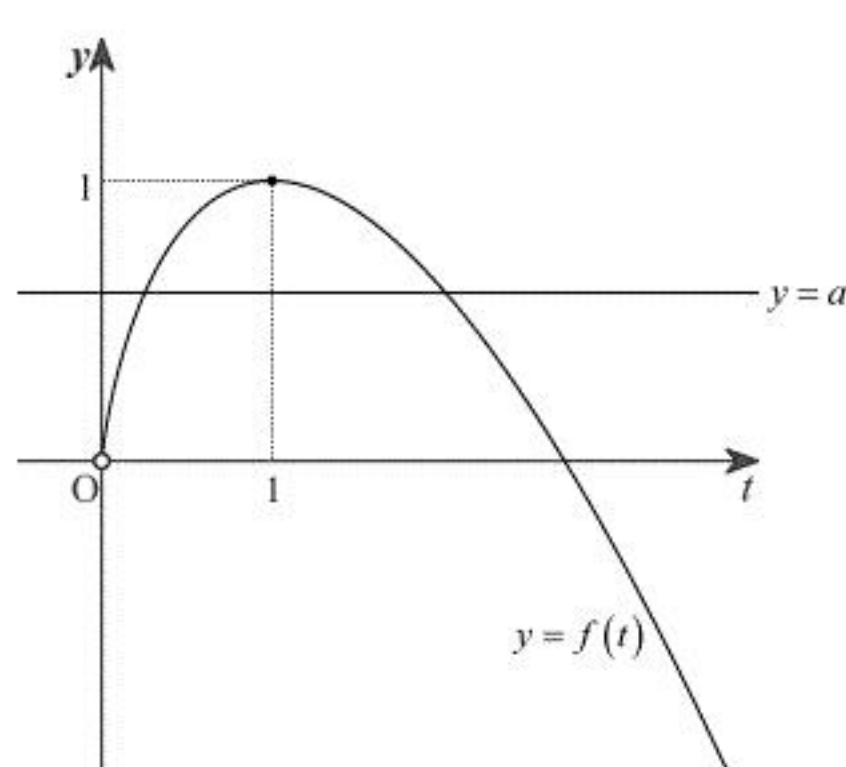
$$\therefore a = -t(\log t - 1) \quad (\because t > 0)$$

を満たす。よって、点 $(a, 0)$ から C に引ける接線の本数は、 $y = a$ と $y = -t(\log t - 1)$ ($t > 0$) の共有点の個数に一致する。ここで、 $f(t) = -t(\log t - 1)$ とおくと、 $f'(t) = -\log t$ となる。したがって $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

また、 $f(1) = 1$ 、 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ であるから、 $y = a$ と $y = f(t)$ ($t > 0$) のグラフは以下のようにな

る。



以上より、点 $(a, 0)$ から C に引ける接線の本数は

$$\begin{cases} 1 < a \text{ のとき} & 0 \text{ 本} \\ a \leq 0, a = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} 1 < a \text{ のとき} & 0 \text{ 本} \\ a \leq 0, a = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \end{cases}$$

(2)

$x = t$ ($t > 0$) における C の法線の方程式は

$$y = -t(x-t) + \log t$$

$$\therefore y = -tx + t^2 + \log t$$

となる。これが点 $(a, 0)$ を通るとき、

$$0 = -ta + t^2 + \log t$$

$$\therefore a = t + \frac{\log t}{t} \quad (\because t > 0)$$

を満たす。よって、点 $(a, 0)$ を通る C の法線の本数は、 $y = a$ と $y = t + \frac{\log t}{t}$ ($t > 0$) の共有点の

個数に一致する。ここで、 $g(t) = t + \frac{\log t}{t}$ とおくと、

$$g'(t) = 1 + \frac{1 - \log t}{t^2}$$

$$= \frac{t^2 + 1 - \log t}{t^2}$$

となる。 $y = \log x$ と、 $x = 1$ での $y = \log x$ の接線 $y = x - 1$ を考えると、 $\log x < x - 1$ が成立するので

$$g'(t) = \frac{t^2 + 1 - \log t}{t^2}$$

$$> \frac{t^2 + 1 - (t - 1)}{t^2}$$

$$= \frac{t^2 - t + 2}{t^2}$$

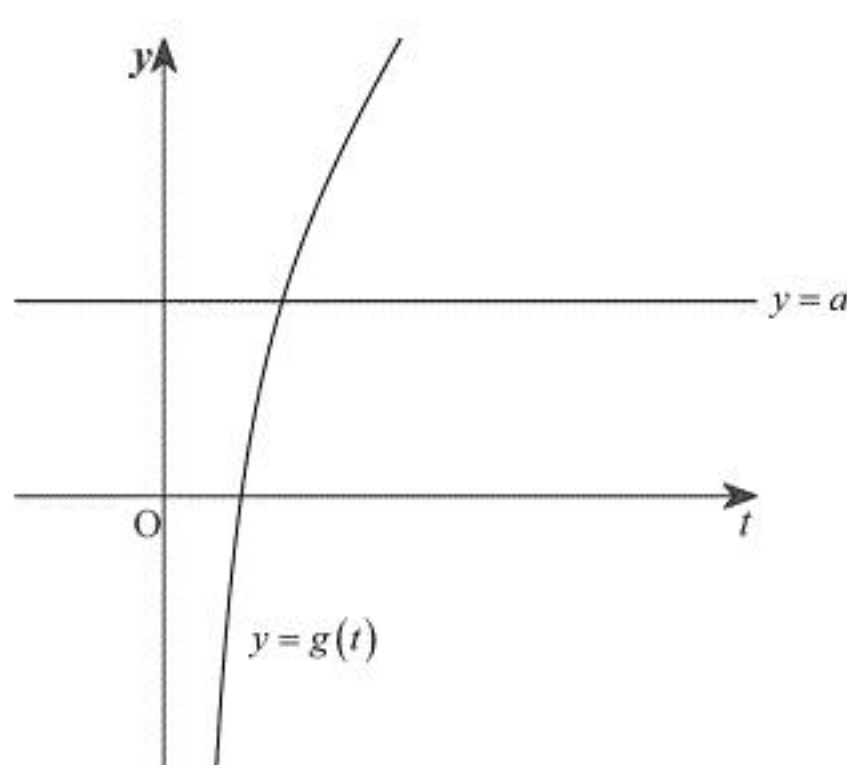
$$= \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{t^2}$$

$$> 0$$

である。したがって、 $g(t)$ は $t > 0$ において単調増加する。また、

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$$

であるので、 $y = a$ と $y = t + \frac{\log t}{t}$ ($t > 0$) のグラフは以下のようになる。



以上より、 C の法線で点 $(a, 0)$ を通るものはちょうど1本ある。

(証明終)

(3)

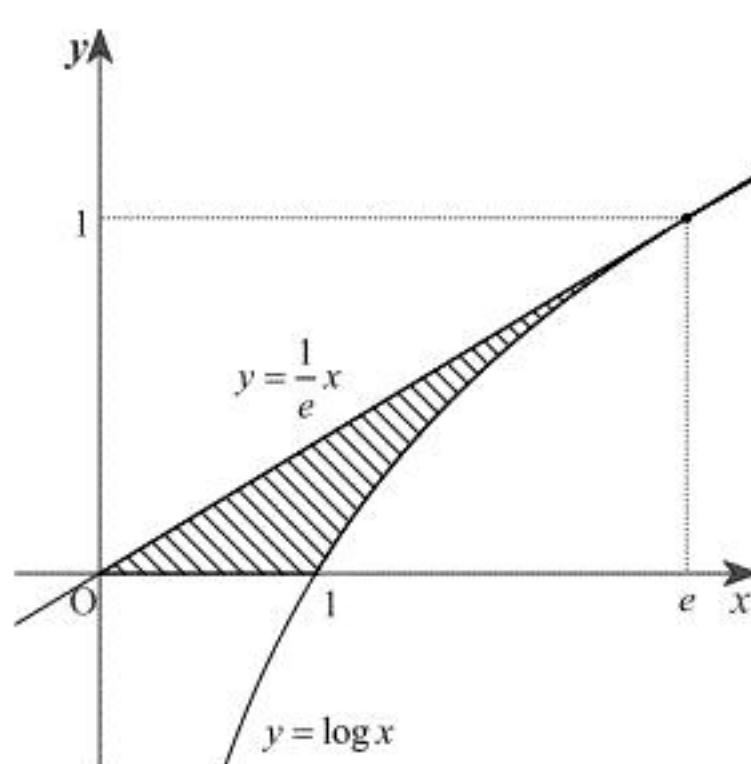
(1)より、 C の接線が原点を通るとき、

$$0 = \frac{1}{t} \cdot 0 + \log t - 1$$

$$\Leftrightarrow \log t = 1$$

$$\therefore t = e$$

であり、この接線の方程式は $y = \frac{1}{e}x$ となる。したがって求める面積は、以下の図の斜線部となる。



上図より求める面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot e \cdot 1 - \int_1^e \log x dx = \frac{e}{2} - [x(\log x - 1)]_1^e$$

$$= \frac{e}{2} - \{0 - (-1)\}$$

$$= \frac{e}{2} - 1$$

である。

(答) $\frac{e}{2} - 1$