

1

(1)

点 $P(t, 0)$ は原点 O とは異なるため、 $t \neq 0$ である。ここで、直線 CP の方程式は $y = -\frac{2}{t}x + 2$ で

あり、 $Q(1, u)$ を通るから、

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2}{t} \cdot 1 + 2 \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

であり、また、直線 DP の方程式は $y = -\frac{1}{t}x + 1$ であり、 $R(-1, v)$ を通るから、

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{t} \cdot (-1) + 1 \\ &= 1 + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

である。

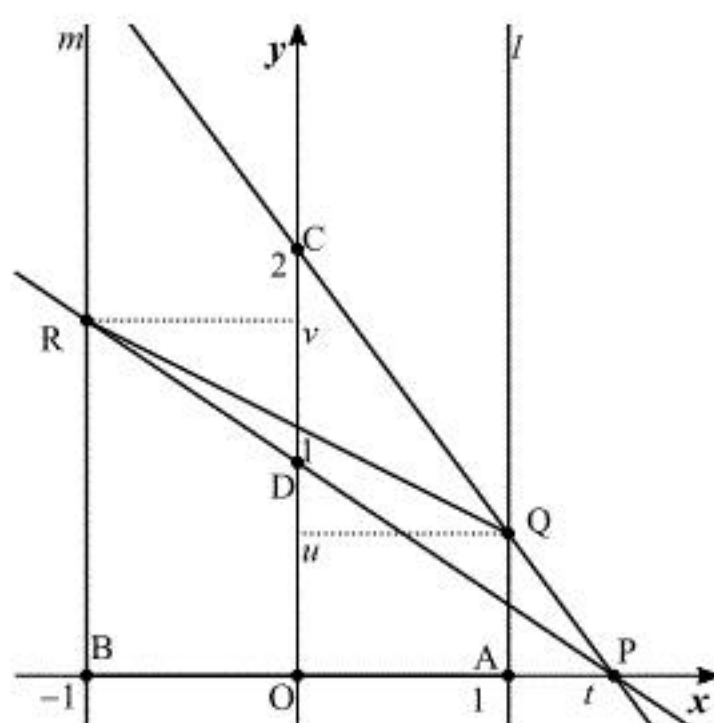
$$(\text{答}) \quad u = 2\left(1 - \frac{1}{t}\right), v = 1 + \frac{1}{t}$$

(2)

u, v が共に正になるときの t の範囲は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(1 - \frac{1}{t}\right) > 0 \\ 1 + \frac{1}{t} > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{t} < 1 \\ &\Leftrightarrow t < -1, 1 < t \end{aligned}$$

である。このとき、台形 $QABR$ は以下の図のようになる。



上図より、台形 $QABR$ の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (u + v) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{t}\right) + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{t} \end{aligned}$$

と表される。 t は $t < -1, 1 < t$ を動くため、 S の取り得る値の範囲は

$$2 < S < 3, 3 < S < 4$$

である。

$$(\text{答}) \quad t \text{ の範囲: } t < -1, 1 < t, \text{ 台形の面積 } S \text{ の範囲: } 2 < S < 3, 3 < S < 4$$

(3)

直線 QR の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{u-v}{2}(x-1) + u \\ \Leftrightarrow y &= \frac{u-v}{2}x + \frac{u+v}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2} \left\{ 2\left(1 - \frac{1}{t}\right) - \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right\} x + \frac{1}{2} \left\{ 2\left(1 - \frac{1}{t}\right) + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right\} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{t}\right) x + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{t}\right) \\ \Leftrightarrow 0 &= (x-2y+3)t - (3x+1) \quad (\because t \neq 0) \end{aligned}$$

と表される。この方程式が t についての恒等式となるとき、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3x+1=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。この点は t の値に依らず直線 QR 上にある。さらに、この点の x 座標について、

$-1 < -\frac{1}{3} < 1$ であるため、線分 QR は t の値に依らず、定点 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ を通る。

$$(\text{答}) \quad E\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

2

(1)

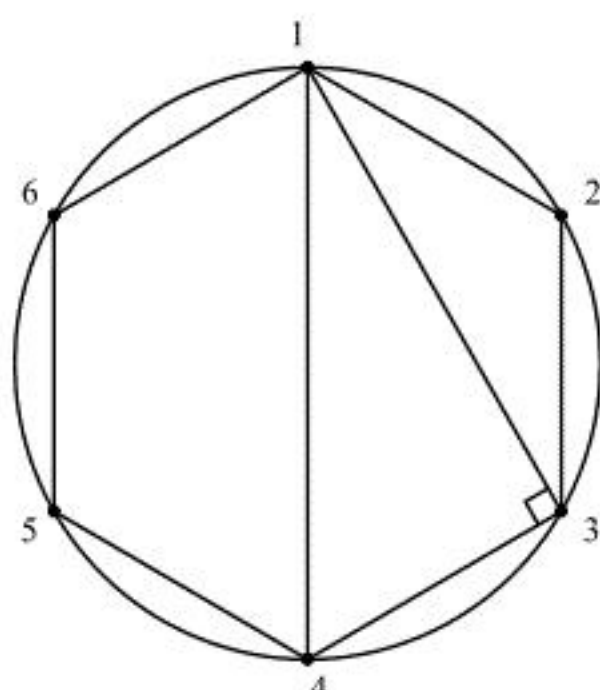
まず、頂点 i, j, k が三角形をなすのは、 i, j, k がすべて異なる場合であるから、その確率は、

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

である。このうち、直角三角形をなすのは、下図のように三角形の1辺が外接円の直径となる場合であるから、その確率は、直径となる対角線の選び方が3通り、残り1つの頂点の選び方が4通り、 (i, j, k) の組み合わせが3!通りであるから、その確率は

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{3}$$

である。



また、鈍角三角形をなすのは、隣接3頂点で三角形をなす場合のみであるから、その確率は、

$$\frac{6 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{6}$$

である。したがって、鋭角三角形をなす確率は、

$$\frac{5}{9} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{18}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 三角形: } \frac{5}{9}, \text{ 直角三角形: } \frac{1}{3}, \text{ 鋭角三角形: } \frac{1}{18}, \text{ 鈍角三角形: } \frac{1}{6}$$

(2)

(1)と同様にして、三角形をなす確率は、

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

である。以下、 n が偶数か奇数かで場合分けする。

[1] n が偶数のとき

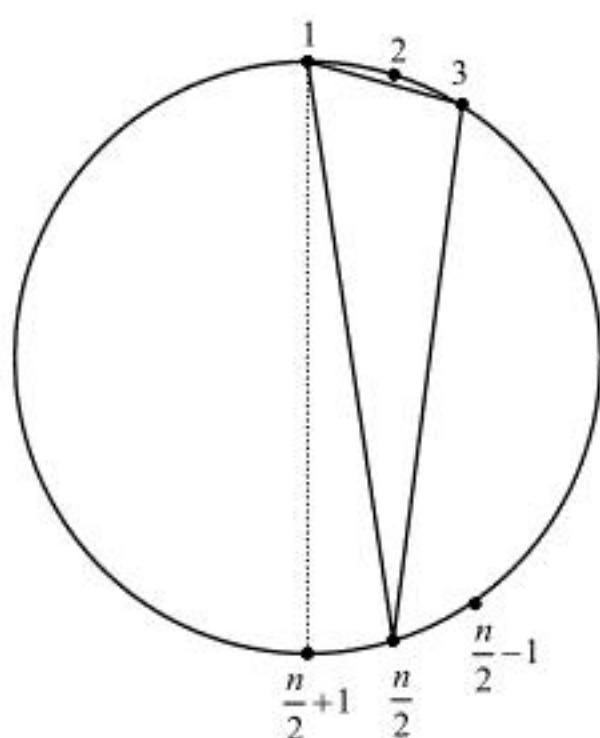
直角三角形をなすのは、(1)と同様に、1辺が外接円の直径となす場合であり、その確率は、

直径の選び方が $\frac{n}{2}$ 通り、残り1つの頂点の選び方が $(n-2)$ 通り、 (i, j, k) の組み合わせが3!通りであることから、

$$\frac{\frac{n}{2} \cdot (n-2) \cdot 3!}{n^3} = \frac{3(n-2)}{n^2}$$

である。また、鈍角三角形となるのは、外接円の中心が三角形の外側になる場合である

から、鋭角となる1つの頂点を固定して考えると、下図のように片側の $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ 個の頂点から2つ選べばよい。



よって、固定する頂点が n 通り、左右両側について $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ 個の頂点から2つ選べばよいが、1つの三角形に対し2度数えられることに注意し、また、 (i, j, k) の組み合わせが3!通りであることから、

$$\frac{n \cdot \binom{\frac{n}{2}-1}{2} \cdot C_2 \cdot 2}{n^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3! = \frac{3(n-2)(n-4)}{4n^2}$$

となる。したがって、鋭角三角形となる確率は、

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} - \frac{3(n-2)}{n^2} - \frac{3(n-2)(n-4)}{4n^2} = \frac{(n-2)(n-4)}{4n^2}$$

となる。

[2] n が奇数のとき

どの頂点を選んでも、辺が外接円の直径となることはないから、直角三角形となる確率は0である。また、鈍角三角形となる確率は、[1]と同様に、鋭角となる1つの頂点を固定すれば、片側の $\frac{n-1}{2}$ 個の頂点から2つ選べばよく、

$$\frac{n \cdot \binom{\frac{n-1}{2}}{2} \cdot C_2 \cdot 2}{n^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3! = \frac{3(n-1)(n-3)}{4n^2}$$

である。したがって、鋭角三角形となる確率は、

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} - \frac{3(n-1)(n-3)}{4n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{4n^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{array}{lll} n \text{ が偶数のとき} & \text{直角三角形: } \frac{3(n-2)}{n^2} & \text{鋭角三角形: } \frac{(n-2)(n-4)}{4n^2} \\ n \text{ が奇数のとき} & \text{直角三角形: } 0 & \text{鋭角三角形: } \frac{(n-1)(n+1)}{4n^2} \end{array}$$

3

(1)

絶対値の中身の正負で場合分けする。

[1] $x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 2 - (2x - 2) \\ &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x - 2)^2 \end{aligned}$$

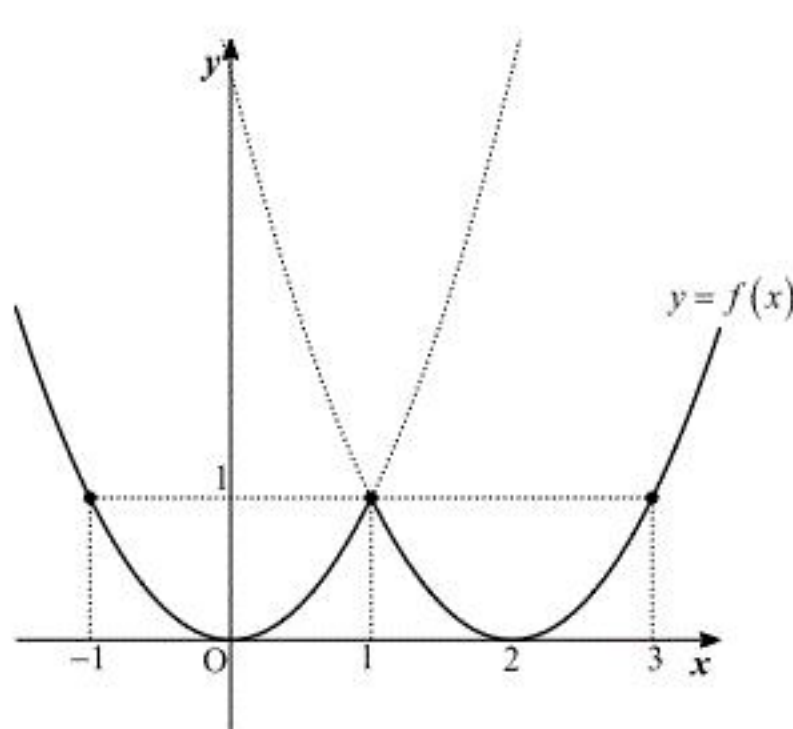
となる。

[2] $x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 2 + (2x - 2) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]より, $y = f(x)$ のグラフの概形は下図の実線部分のようになる。



(答) 上図

(2)

点 $(0, 1)$ を通り, 傾き m の直線 l の方程式は $y = mx + 1$ である。直線 l と曲線 $y = (x - 2)^2$ が

$1 < x < 2$ において接する必要十分条件は, 2 次方程式 $mx + 1 = (x - 2)^2$ が $1 < x < 2$ において重解を持つことである。ここで,

$$\begin{aligned} mx + 1 &= (x - 2)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - (m + 4)x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

となるため, 2 次方程式 $x^2 - (m + 4)x + 3 = 0$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= (m + 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= (m + 4)^2 - 12 \end{aligned}$$

となる。よって, 2 次方程式 $x^2 - (m + 4)x + 3 = 0$ が重解をもつとき,

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (m + 4)^2 - 12 &= 0 \\ \therefore m &= -4 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。このとき, 解は $x = \frac{m + 4}{2}$ であるため, $m = -4 + 2\sqrt{3}$ のとき, 直線 l と曲線 $y = (x - 2)^2$ が

$1 < x < 2$ において接する。ここで, (1) の図を踏まえ, 以下のように場合分けする。

[1] $m \geq 0$ のとき

直線 l と曲線 $y = f(x)$ は $-1 \leq x < 0$ と $x \geq 3$ において交点をそれぞれ 1 個ずつもつ。なお, $m = 0$ のとき, 前述の 2 個の交点に加え, 直線 l は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, 1)$ を通る。

[2] $-4 + 2\sqrt{3} < m < 0$ のとき,

直線 l と曲線 $y = f(x)$ は $x < -1$ と $0 < x < 1$ において交点をそれぞれ 1 個ずつもち, $1 < x < 3$ において交点を 2 個もつ。

[3] $m \leq -4 + 2\sqrt{3}$ のとき

直線 l と曲線 $y = f(x)$ は $x < -1$ と $0 < x < 1$ において交点をそれぞれ 1 個ずつもつ。なお,

$m = -4 + 2\sqrt{3}$ のとき, 前述の 2 個の交点に加え, 直線 l は曲線 $y = f(x)$ と点 $(\sqrt{3}, 7 - 4\sqrt{3})$

において接する。

以上, [1], [2], [3]より, 直線 l と曲線 C の交点の数は,

$m < -4 + 2\sqrt{3}, 0 < m$ のとき, 2 個

$m = -4 + 2\sqrt{3}, 0$ のとき, 3 個

$-4 + 2\sqrt{3} < m < 0$ のとき, 4 個

となる。

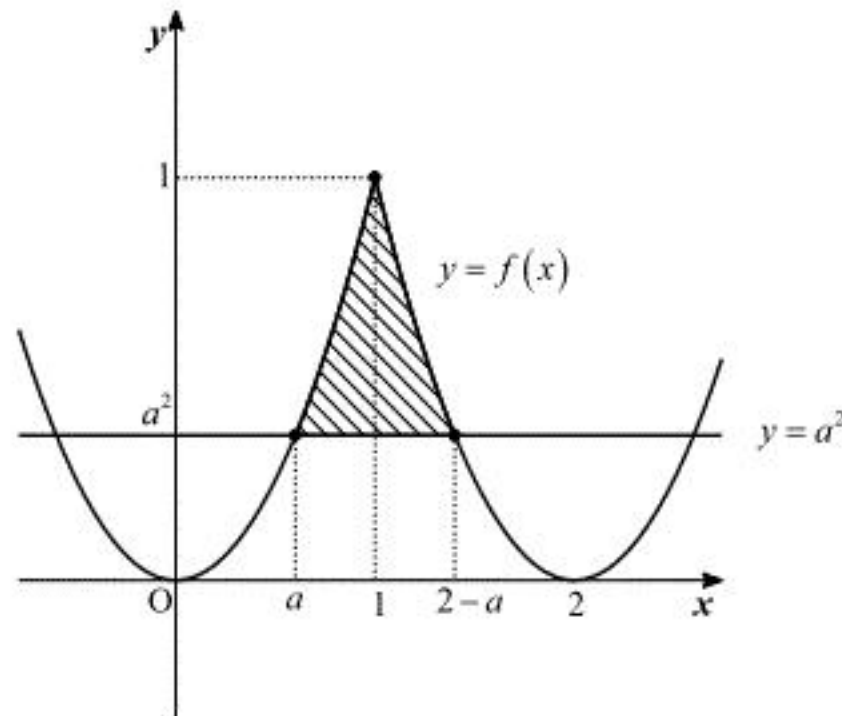
$m < -4 + 2\sqrt{3}, 0 < m$ のとき, 2 個

(答) $m = -4 + 2\sqrt{3}, 0$ のとき, 3 個

$-4 + 2\sqrt{3} < m < 0$ のとき, 4 個

(3)

$0 < a < 1$ より, 求める領域は下図のようになる。



曲線 $y = f(x)$ は $x = 1$ に関して対称であるから, 上図の領域も $x = 1$ に関して対称である。よって, 求める面積は,

$$\begin{aligned} 2 \int_a^1 (x^2 - a^2) dx &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 - a^2 x \right]_a^1 \\ &= \frac{4}{3} a^3 - 2a^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{4}{3} a^3 - 2a^2 + \frac{2}{3}$