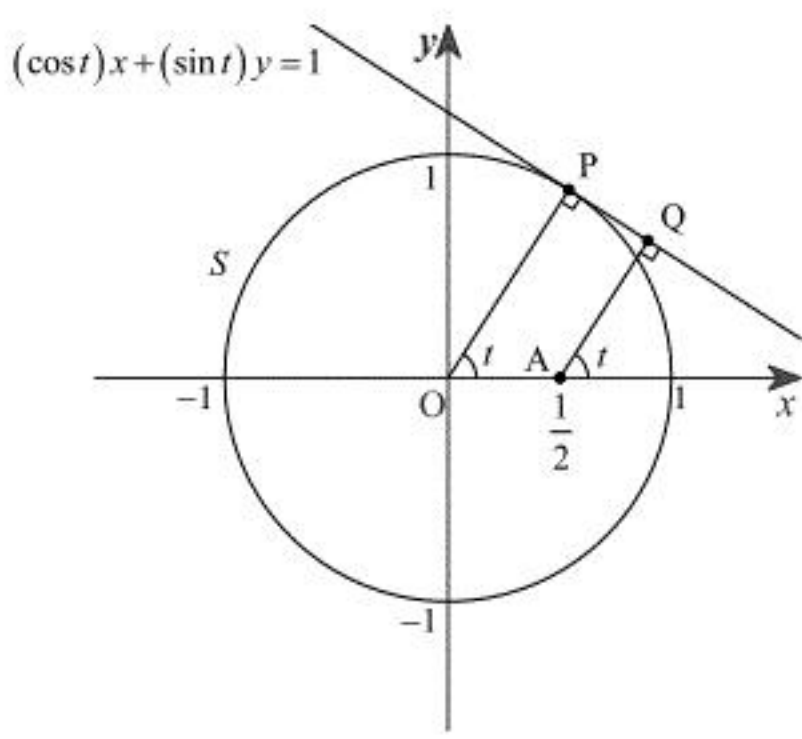


1

(1)

PはS上を動く点であるから、x軸の正の方向とOPのなす角 t の範囲は $0 \leq t < 2\pi$ である。
また、Sは原点を中心とする半径1の円であるから、その方程式は $x^2 + y^2 = 1$ である。これより、 $P(\cos t, \sin t)$ におけるSの接線は $(\cos t)x + (\sin t)y = 1$ と表される。



ここで、QはPにおけるSの接線にAから下ろした垂線の交点であるから、AQの長さは点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos t \cdot \frac{1}{2} + \sin t \cdot 0 - 1}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} \right| &= \left| \frac{1}{2} \cos t - 1 \right| \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cos t \quad (\because -1 \leq \cos t \leq 1) \end{aligned}$$

である。また、OP, AQはいずれもPにおけるSの接線と垂直に交わるから、OP//AQである。これより、x軸の正の方向とAQのなす角も t である。以上より、 $f(t), g(t)$ は

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2} \cos t\right) \cos t \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2 t + \cos t + \frac{1}{2} \\ g(t) &= 0 + \left(1 - \frac{1}{2} \cos t\right) \sin t \\ &= -\frac{1}{2} \sin t \cos t + \sin t \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(t) = -\frac{1}{2} \cos^2 t + \cos t + \frac{1}{2}, \quad g(t) = -\frac{1}{2} \sin t \cos t + \sin t$$

(2)

$g(t)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin^2 t + \cos t \\ &= -\cos^2 t + \cos t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\cos^2 t + \cos t + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos t &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad (\because -1 \leq \cos t \leq 1) \\ \Leftrightarrow t &= \alpha, \beta \quad (\because 0 \leq t < 2\pi) \end{aligned}$$

となる。ここで、 α, β は、 $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \frac{3}{2}\pi \right)$ を満たす実数とする。

このとき、 $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	α	...	β	...	(2π)
$g'(t)$	$\nearrow$	+	0	-	0	+	$\nearrow$
$g(t)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$g(\beta)$	$\nearrow$	(0)

上表より、 $g(t)$ の最大値は $g(\alpha)$ となる。ここで、 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より $\sin \alpha > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt[4]{12}}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $g(\alpha)$ の値は

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt[4]{12}}{2} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt[4]{12}}{8} \end{aligned}$$

である。以上より、 $g(t)$ は $t = \alpha$ のとき最大値 $\frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt[4]{12}}{8}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt[4]{12}}{8}$$

(3)

$f(t)$ を t で微分すると

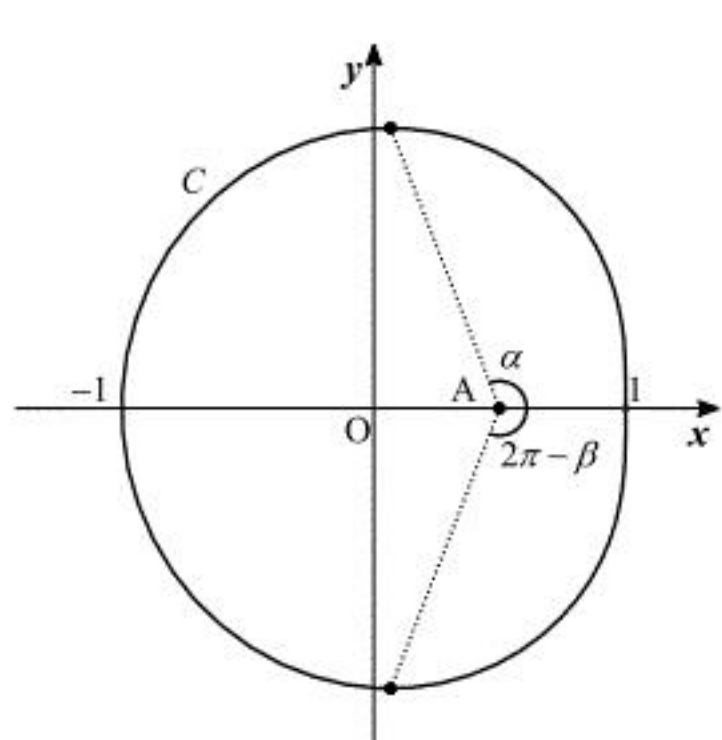
$$\begin{aligned} f'(t) &= \sin t \cos t - \sin t \\ &= \sin t (\cos t - 1) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin t (\cos t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin t = 0, \cos t = 1 \\ \therefore t &= 0, \pi \quad (\because 0 \leq t < 2\pi) \end{aligned}$$

となるから、Cの増減表と概形は次のようになる。

t	0	...	α	...	π	...	β	...	(2π)
$f'(t)$	$\nearrow$	-	-	-	0	+	+	+	$\nearrow$
$f(t)$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	(1)
$g'(t)$	$\nearrow$	+	0	-	-	-	0	+	$\nearrow$
$g(t)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(\beta)$	$\nearrow$	(0)



ここで

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & \rightarrow & 1 \\ \hline t & \pi & \rightarrow & 0 \end{array}$$

であるから、求める面積は

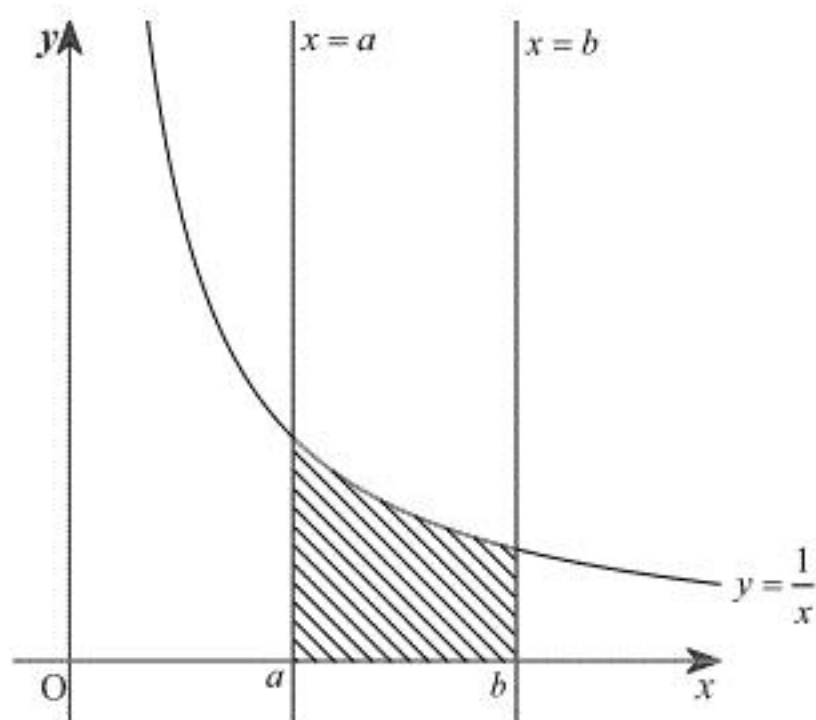
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y dx &= \int_{\pi}^0 y \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt \\ &= \int_{\pi}^0 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sin t \cos t + \sin t \right) \cdot \sin t (\cos t - 1) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left\{ \sin^2 t (\cos t - 2) (\cos t - 1) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left\{ \sin^2 t (2 + \cos^2 t) - 3 \sin^2 t \cos t \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1 - \cos 2t}{2} \cdot \left(2 + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \right\} dt - \frac{3}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos t dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (5 - 4 \cos 2t - \cos^2 2t) dt - \frac{1}{2} [\sin^3 t]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} \left(5 - 4 \cos 2t - \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{9}{2} t - 2 \sin 2t - \frac{1}{8} \sin 4t \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{9}{16} \pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{16} \pi$$

(1)

$S(a, b)$ は下図の斜線部の面積である。



これより $S(a, b)$ の値は

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \int_a^b \frac{dx}{x} \\ &= [\log x]_a^b \\ &= \log b - \log a \\ &= \log \frac{b}{a} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} S(n, 3n) &= \log \frac{3n}{n} \\ &= \log 3 \end{aligned}$$

となるから、 $S(n, 3n)$ の値が n によらないことが示された。

(証明終)

(2)

(1)より $S(n, n + \sqrt{n}) = \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S(n, n + \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \log 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。これより $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n, n + \sqrt{n}) = 0$ は示された。

(証明終)

(3)

(1)より $S(n, n + k) = \log \left(1 + \frac{k}{n} \right)$ であるから、区分別求積法を用いて計算すると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} S(n, n + k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \int_0^2 \log(1 + x) dx \\ &= \int_0^2 (1 + x)' \log(1 + x) dx \\ &= [(1 + x) \log(1 + x)]_0^2 - \int_0^2 dx \\ &= 3 \log 3 - [x]_0^2 \\ &= 3 \log 3 - 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $3 \log 3 - 2$

(1)

$\sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ であるため、以下の2つに場合分けして考える。

[1] $\sqrt{a^2+b^2} = 0$ のとき

$(a, b) = (0, 0)$ であり、このとき、

$$\begin{cases} \sqrt{n}\sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ a+b = 0 \\ \sqrt{m}\sqrt{a^2+b^2} = 0 \end{cases}$$

となるから、 $\sqrt{n}\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b \leq \sqrt{m}\sqrt{a^2+b^2}$ はすべての自然数 m, n に対して成立する。

[2] $\sqrt{a^2+b^2} > 0$ のとき

$(a, b) \neq (0, 0)$ であり、また、 $a \geq 0, b \geq 0$ であるため、

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\sqrt{a^2+b^2} &\leq a+b \leq \sqrt{m}\sqrt{a^2+b^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{n} &\leq \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \sqrt{m} \left(\because \sqrt{a^2+b^2} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow n &\leq \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq m \end{aligned}$$

となる。ここで、実数 a, b が $a \geq 0, b \geq 0, (a, b) \neq (0, 0)$ を動くとき、 $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ の取り得る値

の範囲を求める。 $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ について、

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} &= \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1 + \frac{2ab}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

となるため、 $a=0, b>0$ もしくは $a>0, b=0$ のとき、 $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = 1$ となる。また、

$a>0, b>0$ のとき、 $a^2>0, b^2>0$ であるため、相加・相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &\geq 2\sqrt{a^2b^2} \\ \Leftrightarrow a^2+b^2 &\geq 2ab \left(\because a>0, b>0 \right) \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1 \left(\because a>0, b>0 \right) \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq 2 \end{aligned}$$

となる。等号成立条件は $a^2=b^2$ かつ $a>0, b>0$ 、すなわち、 $a=b>0$ である。したがって、実数 a, b が $a \geq 0, b \geq 0, (a, b) \neq (0, 0)$ を動くとき、

$$1 \leq \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq 2$$

となる。求める範囲にある自然数 m, n は、 $a \geq 0, b \geq 0, (a, b) \neq (0, 0)$ を満たすすべての実

数 a, b に対して、 $n \leq \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq m$ を満たすため、その範囲は $m \geq 2, n=1$ である。

以上、[1], [2]より、求める自然数 m, n の値の範囲は $m \geq 2, n=1$ である。

(答) $m \geq 2, n=1$

(2)

任意の自然数 n と2以上の任意の自然数 m に対し、

$$x=1 \text{ のとき } x^n = x^{n-1}$$

$$1 < x \leq m \text{ のとき } x^n > x^{n-1}$$

となるため、

$$\int_1^m x^n dx > \int_1^m x^{n-1} dx$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \int_1^m x^n dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_1^m \\ &= \frac{m^{n+1} - 1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^m x^{n-1} dx = \frac{m^n - 1}{n}$$

であるため、 $\frac{m^{n+1} - 1}{n+1} > \frac{m^n - 1}{n}$ が成立する。

(証明終)

(3)

${}_m C_n$ について

$${}_m C_n = mn \cdot (mn-1) \cdots (mn-n+1)$$

より ${}_m C_n$ は $(mn-n+1)$ から mn までの連続する n 個の整数の積であり、 m^n は n 個の m の積である。ここで

$$\begin{aligned} (mn-n+1) - m &= (m-1)(n-1) \geq 0 \left(\because m \geq 2, n \geq 1 \right) \\ \therefore mn-n+1 &\geq m \end{aligned}$$

であるから、 $mn \geq mn-1 \geq \cdots \geq mn-n+1 \geq m$ とできる。これより

$$\begin{aligned} {}_m C_n &= mn \cdot (mn-1) \cdots (mn-n+1) \\ &\geq m \cdot m \cdots m \\ &= m^n \end{aligned}$$

が成立する。また、 $\sum_{i=0}^{n-1} m^i$ について

$$\sum_{i=0}^{n-1} m^i = \frac{m^n - 1}{m - 1} \left(\because m \geq 2 \right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} m^n - \sum_{i=0}^{n-1} m^i &= m^n - \frac{m^n - 1}{m - 1} \\ &= \frac{m^{n+1} - 2m^n + 1}{m - 1} \\ &= \frac{(m-2)m^n + 1}{m - 1} \\ &> 0 \left(\because m \geq 2, n \geq 1 \right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $m^n > \sum_{i=0}^{n-1} m^i$ は示された。以上より、自然数 m, n ($m \geq 2$) に対し、

${}_m C_n \geq m^n > \sum_{i=0}^{n-1} m^i$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

X に含まれる数字は相異なるから、含まれる数字によらず色の付け方は $2^3=8$ (通り)ある。
このうちすべての色が同じ色となるのは、その色が赤か青かの2通りあるから、求める確率は

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C) \\ &\Leftrightarrow P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B \cup C) = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

となる。ここで $P(A \cap B), P(B \cap C), P(C \cap A) \geq P(A \cap B \cap C)$ であるから

$$P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - P(A \cap B \cap C) \geq 0$$

である。以上より、ある試行における3つの事象 A, B, C について

$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$ が成立することが示された。

(証明終)

(3)

集合 X, Y, Z において、各集合に属するすべての色が同じとなる事象をそれぞれ S, T, U とすると、(1)よりその確率は

$$P(S) = P(T) = P(U) = \frac{1}{4}$$

である。ここで、 X, Y, Z のうち少なくとも1つが1色からなる確率は $P(S \cup T \cup U)$ であり、(2)よりその値の範囲は

$$P(S \cup T \cup U) \leq P(S) + P(T) + P(U) = \frac{3}{4}$$

である。 X, Y, Z のどれもが2色からなる確率は $P(\overline{S \cup T \cup U})$ であるから、その値の範囲は

$$P(\overline{S \cup T \cup U}) = 1 - P(S \cup T \cup U) \geq \frac{1}{4} \left(\because P(S \cup T \cup U) \leq \frac{3}{4} \right)$$

である。これより、 X, Y, Z のどれもが2色からなる確率が0でないことが示された。

(証明終)