

1 座標平面上で原点 O を中心、半径 1 の円を S とする。点 P が円 S 上を動くとき、 P における S の接線に点 $A(\frac{1}{2}, 0)$ から下ろした垂線の交点 Q のなす軌跡を C とする。 X 軸の正の方向に対して OP のなす角を t として、 P の座標を $(\cos t, \sin t)$ で表す。このときの Q の座標を $(f(t), g(t))$ とする。

(1) $f(t), g(t)$ を求めよ。

(2) $g(t)$ の最大値を求めよ。

(3) C で囲まれた図形の $y \geq 0$ の部分の面積を求めよ。

2 $0 < a < b$ を満たす実数 a, b に対し, 曲線 $y = \frac{1}{x}$, x 軸及び 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積を $S(a, b)$ で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) n を自然数とする. $S(n, 3n)$ を求め, この値は n によらないことを示せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n, n + \sqrt{n}) = 0$ が成り立つことを示せ.

(3) 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} S(n, n+k)$$

3

(1) 不等式

$$\sqrt{n}\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b \leq \sqrt{m}\sqrt{a^2+b^2}$$

が, すべての負でない実数 $a \geq 0, b \geq 0$ に対して成り立つような自然数 m と n の範囲を求めよ.

(2) m を 2 以上の自然数, n を自然数とする. 不等式

$$\frac{m^{n+1}-1}{n+1} > \frac{m^n-1}{n}$$

が成り立つことを示せ.

(3) m を 2 以上の自然数, n を自然数とするとき, 次の不等式

$${}_m n C_n \geq m^n > \sum_{i=0}^{n-1} m^i$$

が成り立つことを示せ.

4 1 から 9 までの自然数のそれぞれに赤か青の色を付ける操作を考える.

(1) X をこれら 1 から 9 までの自然数のうち相異なる 3 つの数からなる集合とする. 1 から 9 までのそれぞれに確率 $\frac{1}{2}$ で赤か青の色を付けるとき, X に属するすべての色が同じ色である確率を求めよ.

(2) 一般に, ある試行における 3 つの事象 A, B, C について,

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

が成り立つことを示せ. ここで $P(A)$ は事象 A が起こる確率である.

(3) 1 から 9 までの自然数のうち相異なる 3 つの数からなる集合が 3 つある. それを X, Y, Z とする. 1 から 9 のそれぞれに確率 $\frac{1}{2}$ で赤か青の色を付ける操作をしたとき, X, Y, Z のどれにも両方の数が含まれる確率が 0 ではないことを示せ. ただし, $X \cap Y, Y \cap Z, Z \cap X$ は空集合とは限らない.