

(1)

等差数列 $a, c_1, c_2, \dots, c_n, b$ の公差を d 、等比数列 $a, e_1, e_2, \dots, e_n, b$ の公比を r とする。このとき、 $a, e_1, e_2, \dots, e_n, b$ はすべて正だから $r > 0$ となることに注意すると、

$$b = a + (n+1)d \Leftrightarrow d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$b = ar^{n+1} \Leftrightarrow r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

となる。これと $0 < a < b$ より

$$d > 0$$

$$r > 1$$

がわかる。ここで、

$$c_1 c_n = (a+d)(b-d)$$

$$e_1 e_n = ar \cdot br^{-1} = ab$$

と表すことができるため、

$$\begin{aligned} c_1 c_n - e_1 e_n &= (a+d)(b-d) - ab \\ &= d(b-a-d) \\ &= d\{(n+1)d-d\} \\ &= nd^2 \\ &> 0 \quad (\because d > 0) \end{aligned}$$

$$\therefore c_1 c_n > e_1 e_n$$

を得る。

(答) $c_1 c_n > e_1 e_n$

(2)

$$c_1 + c_n = (a+d) + (b-d) = a+b$$

$$e_1 + e_n = ar + br^{-1}$$

と表すことができるため、

$$\begin{aligned} (c_1 + c_n) - (e_1 + e_n) &= (a+b) - (ar + br^{-1}) \\ &= a(1-r) + br^{-1}(r-1) \\ &= (r-1)(br^{-1} - a) \\ &= (r-1)(ar^{n+1}r^{-1} - a) \\ &= a(r-1)(r^n - 1) \\ &> 0 \quad (\because r > 1) \end{aligned}$$

$$\therefore c_1 + c_n > e_1 + e_n$$

を得る。

(答) $c_1 + c_n > e_1 + e_n$

(3)

(1)より、数列 $\{c_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) の一般項は、

$$c_i = a + (b-a)\frac{i}{n+1}$$

であり、数列 $\{e_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) の一般項は、

$$e_i = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n+1}}$$

である。 $0 < \frac{i}{n+1} < 1$ であるから、

$$f(x) = a + (b-a)x - a\left(\frac{b}{a}\right)^x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

とおけば、 $f\left(\frac{i}{n+1}\right) = c_i - e_i$ が成り立つ。ここで、

$$f'(x) = b - a - a\left(\frac{b}{a}\right)^x \log \frac{b}{a}$$

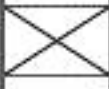
$$f''(x) = -a\left(\frac{b}{a}\right)^x \left(\log \frac{b}{a}\right)^2 < 0$$

より、 $f'(x)$ は x の単調減少関数であることが分かる。また、関数 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で連続かつ $0 < x < 1$ で微分可能であるから、平均値の定理より、

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$$

$$\therefore f'(c) = 0 \quad (\because f(0) = f(1) = 0)$$

を満たす実数 c ($0 < c < 1$) が存在する。また、 $f'(x)$ が単調減少関数であることから、 $f'(c) = 0$ となる c はただ1つである。以上より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	c	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		極大		0

増減表より、 $f(x)$ は $0 < x < 1$ において $f(x) > 0$ を満たすことが分かるので、 $i=1, 2, \dots, n$ について、

$$c_i - e_i = f\left(\frac{i}{n+1}\right) > 0$$

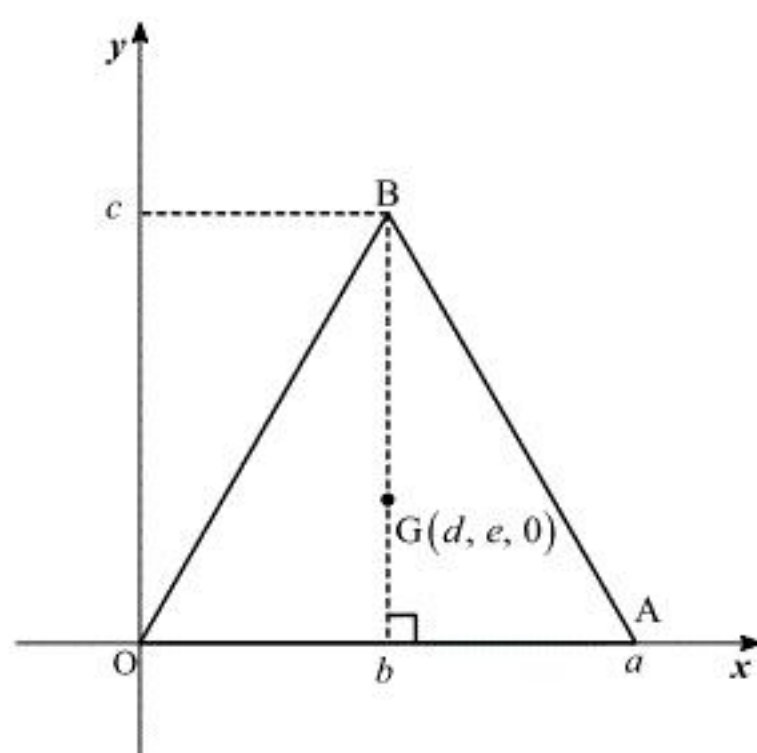
$$\therefore c_i > e_i$$

が成り立つ。

(答) $c_i > e_i$ ($i=1, 2, \dots, n$)

(1)

4点O, A, B, Cが正四面体の頂点となっていることから、三角形OABは正三角形となる。また、点Cから三角形OABに下ろした垂線の足は三角形OABの重心と一致するので、この点をGとすると、 xy 平面上の三角形OABは以下の図のようにになっている。



ここで、

$$OA = a$$

より、三角形OABの一辺の長さは a と分かるので

$$b = OB \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$$

$$c = OB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

を得る。また、 $G(d, e, 0)$ は三角形OABの重心より、

$$d = \frac{1}{3}(a+b) = \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}a$$

$$e = \frac{1}{3}c = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

であることが分かる。これらより、

$$OA^2 = OC^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = d^2 + e^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a^2 = 16$$

$$\therefore a = 2\sqrt{6} \quad (\because a > 0)$$

であるから、

$$b = \frac{1}{2}a = \sqrt{6}$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2}$$

$$d = \frac{1}{2}a = \sqrt{6}$$

$$e = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \sqrt{2}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad a = 2\sqrt{6}, b = \sqrt{6}, c = 3\sqrt{2}, d = \sqrt{6}, e = \sqrt{2}$$

(2)

(1)の結果より、

$$\overrightarrow{TO} = (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -t)$$

$$\overrightarrow{TA} = (\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle OTA &= \frac{\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{TA}}{|\overrightarrow{TO}| |\overrightarrow{TA}|} \\ &= \frac{(-\sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} + (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) + (-t) \cdot (-t)}{\sqrt{t^2+8} \cdot \sqrt{t^2+8}} \\ &= \frac{t^2-4}{t^2+8} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle OTA = \frac{t^2-4}{t^2+8}$$

(3)

(2)と同様に、

$$\overrightarrow{TO} = (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -t)$$

$$\overrightarrow{TC} = (0, 0, 4-t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle OTC &= \frac{\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{TC}}{|\overrightarrow{TO}| |\overrightarrow{TC}|} \\ &= \frac{(-\sqrt{6}) \cdot 0 + (-\sqrt{2}) \cdot 0 + (-t) \cdot (4-t)}{\sqrt{t^2+8} \cdot \sqrt{(4-t)^2}} \\ &= \frac{-t(4-t)}{\sqrt{t^2+8} \cdot (4-t)} \quad (\because 0 < t < 4) \\ &= -\frac{t}{\sqrt{t^2+8}} \end{aligned}$$

と表すことができるので、 $\angle OTC = \angle OTA$ となるときの t の値は、

$0 < \angle OTC < \pi, 0 < \angle OTA < \pi$ を踏まえると、

$$\angle OTC = \angle OTA$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle OTC = \cos \angle OTA$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{\sqrt{t^2+8}} = \frac{t^2-4}{t^2+8}$$

$$\Leftrightarrow -t\sqrt{t^2+8} = t^2-4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。両辺を2乗して

$$t^2(t^2+8) = (t^2-4)^2 \quad (\because 0 < t < 4)$$

$$\Leftrightarrow 16t^2 = 16$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because 0 < t < 4)$$

となり、これは①をみたすため、十分である。このとき、

$$\cos \angle OTA = \frac{t^2-4}{t^2+8} = -\frac{1}{3}$$

であり、 $0 < \angle OTA < \pi$ より $\sin \angle OTA > 0$ であるから、

$$\sin \angle OTA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle OTA} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

が成り立つ。したがって、三角形OTAの面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot OT \cdot AT \cdot \sin \angle OTA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2+8} \cdot \sqrt{1^2+8} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = 1, \cos \angle OTA = -\frac{1}{3}, \text{三角形OTAの面積: } 3\sqrt{2}$$

(1)

与えられた関数 $f(x)$ について、

$$f'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$$

$$f''(x) = (2x+x^2)' e^x + (2x+x^2)(e^x)' = (2+2x)e^x + (2x+x^2)e^x = (x^2+4x+2)e^x$$

となる。よって、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2, 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

となるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(-3)	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-2+\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、関数 $y = f(x)$ は、

$$x = -2 \text{ のときに極大値 } f(-2) = 4e^{-2}$$

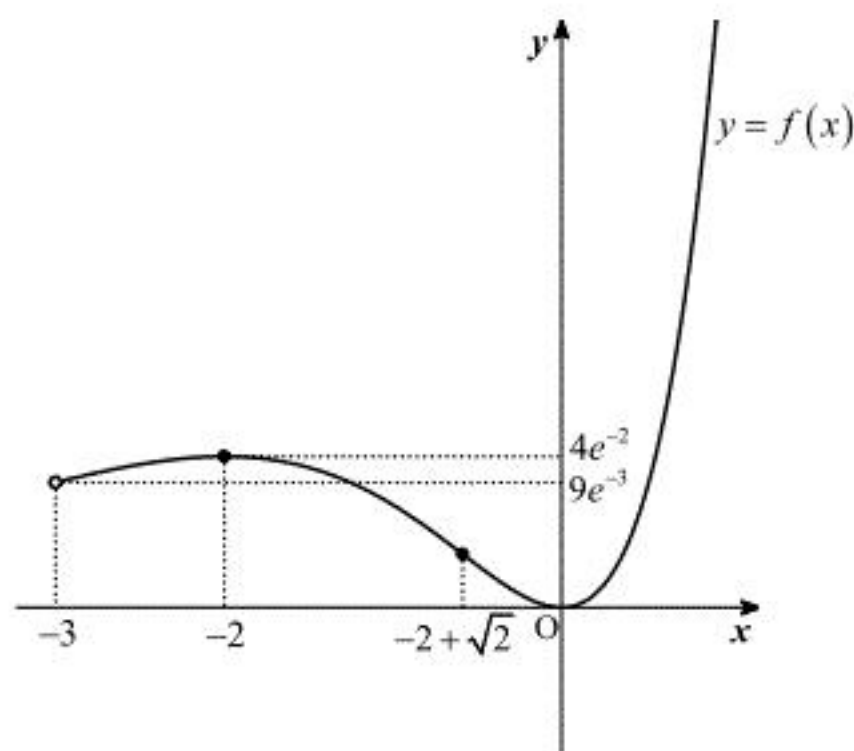
$$x = 0 \text{ のときに極小値 } f(0) = 0$$

をとることが分かり、

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = 9e^{-9}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

であるから、関数 $y = f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



(答) $x = -2$ で極大値 $4e^{-2}$ 、 $x = 0$ で極小値 0 、グラフは前図

(2)

$$f'(1) = 1 \cdot (1+2)e^1 = 3e$$

であるから、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, e)$ における接線の方程式は、

$$y = 3e(x-1) + e$$

$$\Leftrightarrow y = 3ex - 2e$$

と求められる。

(答) $y = 3ex - 2e$

(3)

部分積分法より、与えられた定積分は、

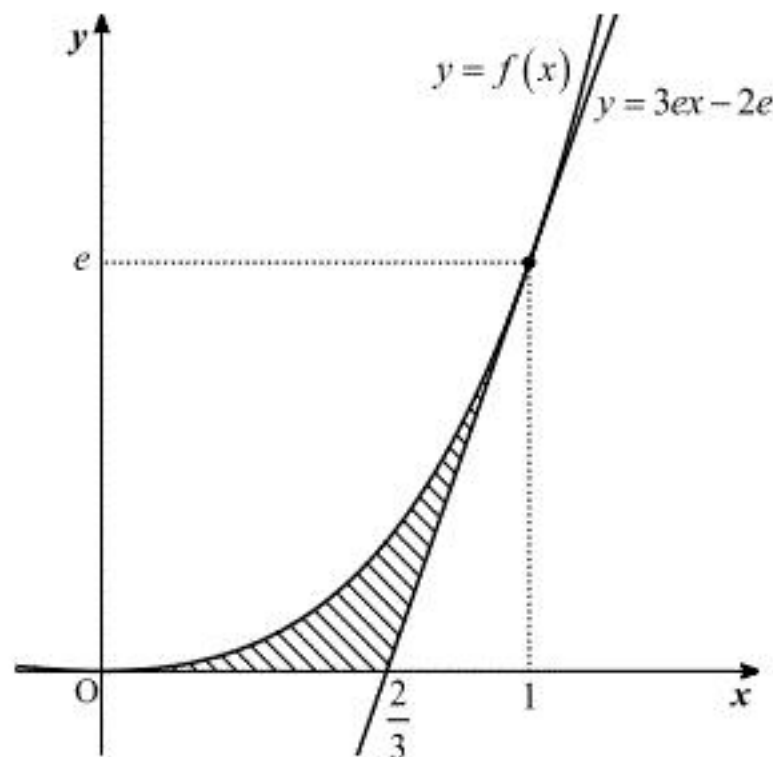
$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 x(e^x)' dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\int_0^1 xe^x dx = 1$

(4)

題意より、求める面積は以下の図の斜線部の面積である。



(2)で求めた接線 $y = 3ex - 2e$ と x 軸との交点の x 座標は、

$$0 = 3ex - 2e$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

であるから、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot e &= \int_0^1 x^2 (e^x)' dx - \frac{e}{6} \\ &= \left([x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx\right) - \frac{e}{6} \\ &= (e - 2 \cdot 1) - \frac{e}{6} \quad (\because (3)) \\ &= \frac{5}{6}e - 2 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\frac{5}{6}e - 2$