

(1)

等差数列 $a, c_1, c_2, \dots, c_n, b$ の公差を d , 等比数列 $a, e_1, e_2, \dots, e_n, b$ の公比を r とする。このとき、 $a, e_1, e_2, \dots, e_n, b$ はすべて正だから $r > 0$ となることに注意すると、

$$b = a + (n+1)d \Leftrightarrow d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$b = ar^{n+1} \Leftrightarrow r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

となる。これと $0 < a < b$ より

$$d > 0$$

$$r > 1$$

がわかる。ここで、

$$c_1 c_n = (a+d)(b-d)$$

$$e_1 e_n = ar \cdot br^{-1} = ab$$

と表すことができるため、

$$\begin{aligned} c_1 c_n - e_1 e_n &= (a+d)(b-d) - ab \\ &= d(b-a-d) \\ &= d\{(n+1)d-d\} \\ &= nd^2 \\ &> 0 \quad (\because d > 0) \end{aligned}$$

$$\therefore c_1 c_n > e_1 e_n$$

を得る。

(答) $c_1 c_n > e_1 e_n$

(2)

$$c_1 + c_n = (a+d) + (b-d) = a+b$$

$$e_1 + e_n = ar + br^{-1}$$

と表すことができるため、

$$\begin{aligned} (c_1 + c_n) - (e_1 + e_n) &= (a+b) - (ar + br^{-1}) \\ &= a(1-r) + br^{-1}(r-1) \\ &= (r-1)(br^{-1} - a) \\ &= (r-1)(ar^{n+1}r^{-1} - a) \\ &= a(r-1)(r^n - 1) \\ &> 0 \quad (\because r > 1) \end{aligned}$$

$$\therefore c_1 + c_n > e_1 + e_n$$

を得る。

(答) $c_1 + c_n > e_1 + e_n$

(3)

(1)より、数列 $\{c_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) の一般項は、

$$c_i = a + (b-a)\frac{i}{n+1}$$

であり、数列 $\{e_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) の一般項は、

$$e_i = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n+1}}$$

である。 $0 < \frac{i}{n+1} < 1$ であるから、

$$f(x) = a + (b-a)x - a\left(\frac{b}{a}\right)^x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

とおけば、 $f\left(\frac{i}{n+1}\right) = c_i - e_i$ が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= b-a - a\left(\frac{b}{a}\right)^x \log \frac{b}{a} \\ f''(x) &= -a\left(\frac{b}{a}\right)^x \left(\log \frac{b}{a}\right)^2 < 0 \end{aligned}$$

より、 $f'(x)$ は x の単調減少関数であることが分かる。また、関数 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で連続かつ $0 < x < 1$ で微分可能であるから、平均値の定理より、

$$\begin{aligned} \frac{f(1)-f(0)}{1-0} &= f'(c) \\ \therefore f'(c) &= 0 \quad (\because f(0)=f(1)=0) \end{aligned}$$

を満たす実数 c ($0 < c < 1$) が存在する。また、 $f'(x)$ が単調減少関数であることから、 $f'(c)=0$ となる c はただ1つである。以上より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	c	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		極大		0

増減表より、 $f(x)$ は $0 < x < 1$ において $f(x) > 0$ を満たすことが分かるので、 $i=1, 2, \dots, n$ について、

$$\begin{aligned} c_i - e_i &= f\left(\frac{i}{n+1}\right) > 0 \\ \therefore c_i &> e_i \end{aligned}$$

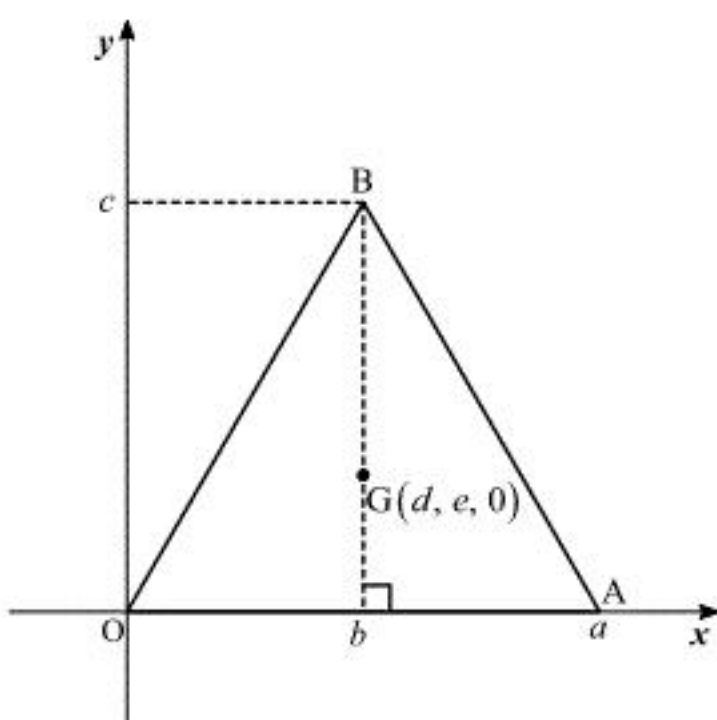
が成り立つ。

(答) $c_i > e_i$ ($i=1, 2, \dots, n$)

2

(1)

4点O, A, B, Cが正四面体の頂点となっていることから、三角形OABは正三角形となる。また、点Cから三角形OABに下ろした垂線の足は三角形OABの重心と一致するので、この点をGとすると、 xy 平面上の三角形OABは以下の図のようになっている。



ここで、

$$OA = a$$

より、三角形OABの一辺の長さは a とわかるので、

$$b = OB \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$$

$$c = OB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

を得る。また、 $G(d, e, 0)$ は三角形OABの重心であるから、

$$d = \frac{1}{3}(a+b) = \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}a$$

$$e = \frac{1}{3}c = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

であることがわかる。これらより、

$$OA^2 = OC^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = d^2 + e^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a^2 = 16$$

$$\therefore a = 2\sqrt{6} \quad (\because a > 0)$$

であるから、

$$b = \frac{1}{2}a = \sqrt{6}$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2}$$

$$d = \frac{1}{2}a = \sqrt{6}$$

$$e = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \sqrt{2}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad a = 2\sqrt{6}, b = \sqrt{6}, c = 3\sqrt{2}, d = \sqrt{6}, e = \sqrt{2}$$

(2)

(1)の結果より、

$$\overrightarrow{TO} = (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -t)$$

$$\overrightarrow{TA} = (\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle OTA &= \frac{\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{TA}}{|\overrightarrow{TO}| |\overrightarrow{TA}|} \\ &= \frac{(-\sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} + (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) + (-t) \cdot (-t)}{\sqrt{t^2 + 8} \cdot \sqrt{t^2 + 8}} \\ &= \frac{t^2 - 4}{t^2 + 8} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle OTA = \frac{t^2 - 4}{t^2 + 8}$$

(3)

(2)と同様に、

$$\overrightarrow{TO} = (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -t)$$

$$\overrightarrow{TC} = (0, 0, 4-t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle OTC &= \frac{\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{TC}}{|\overrightarrow{TO}| |\overrightarrow{TC}|} \\ &= \frac{(-\sqrt{6}) \cdot 0 + (-\sqrt{2}) \cdot 0 + (-t) \cdot (4-t)}{\sqrt{t^2 + 8} \cdot \sqrt{(4-t)^2}} \\ &= \frac{-t(4-t)}{\sqrt{t^2 + 8} \cdot (4-t)} \quad (\because 0 < t < 4) \\ &= -\frac{t}{\sqrt{t^2 + 8}} \end{aligned}$$

と表すことができるので、 $\angle OTC = \angle OTA$ となるときの t の値は、

$0 < \angle OTC < \pi, 0 < \angle OTA < \pi$ を踏まえると、

$$\angle OTC = \angle OTA$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle OTC = \cos \angle OTA$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{\sqrt{t^2 + 8}} = \frac{t^2 - 4}{t^2 + 8}$$

$$\Leftrightarrow -t\sqrt{t^2 + 8} = t^2 - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。両辺を2乗して

$$t^2(t^2 + 8) = (t^2 - 4)^2 \quad (\because 0 < t < 4)$$

$$\Leftrightarrow 16t^2 = 16$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because 0 < t < 4)$$

となり、これは①をみたすため、十分である。このとき、

$$\cos \angle OTA = \frac{t^2 - 4}{t^2 + 8} = -\frac{1}{3}$$

であり、 $0 < \angle OTA < \pi$ より $\sin \angle OTA > 0$ であるから、

$$\sin \angle OTA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle OTA} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

が成り立つ。したがって、三角形OTAの面積は、

$$\frac{1}{2}OT \cdot AT \cdot \sin \angle OTA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{t^2 + 8} \cdot \sqrt{t^2 + 8} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = 1, \cos \angle OTA = -\frac{1}{3}, \text{ 三角形OTAの面積: } 3\sqrt{2}$$

3

(1)

関数 $f(x)$ の導関数は、

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

となるので、曲線 C 上の点 $P(t, f(t))$ における接線 l の方程式は、

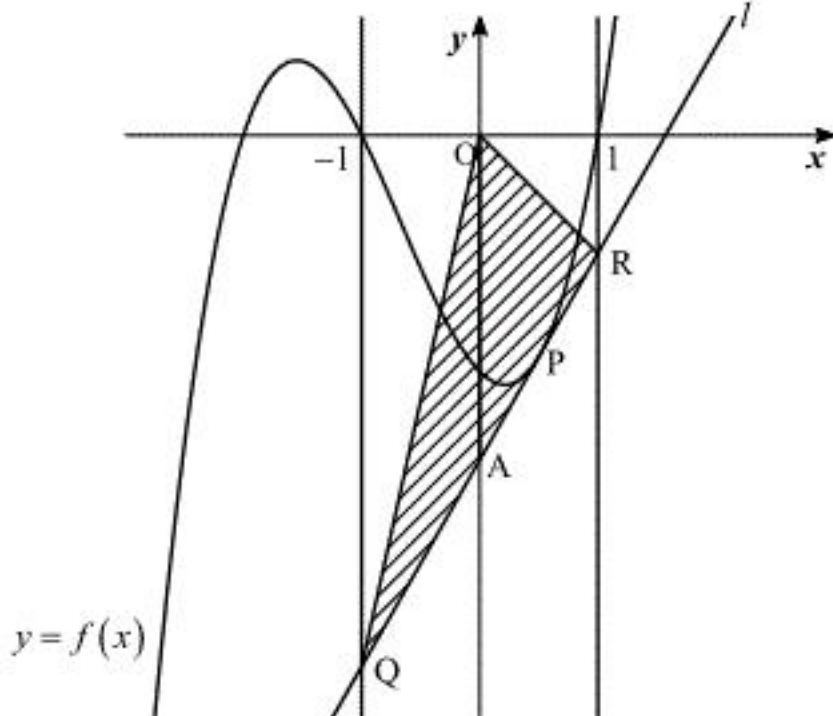
$$\begin{aligned} y &= (3t^2 + 4t - 1)(x - t) + (t^3 + 2t^2 - t - 2) \\ \Leftrightarrow y &= (3t^2 + 4t - 1)x - 2t^3 - 2t^2 - 2 \end{aligned}$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad y = (3t^2 + 4t - 1)x - 2t^3 - 2t^2 - 2$$

(2)

各図形を図示すると以下のようになる。



(1)の結果より、直線 l の方程式に $x=0$ を代入すると、

$$y = -2t^3 - 2t^2 - 2$$

となるので、直線 l と y 軸との交点を点 A とすると、 A の座標は、

$$A(0, -2t^3 - 2t^2 - 2)$$

と表すことができる。三角形 OQR の面積 $S(t)$ は、三角形 OAQ の面積と三角形 OAR の面積の和として与えられるが、この2つの三角形はともに底辺 $|-2t^3 - 2t^2 - 2|$ 、高さ1の三角形であるから、

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |-2t^3 - 2t^2 - 2| \cdot 1 \\ &= |2t^3 + 2t^2 + 2| \end{aligned}$$

となる。ここで、 $-1 < t < 1$ のとき、

$$2t^3 + 2t^2 + 2 = 2t^2(t+1) + 2 > 0$$

であるから、

$$S(t) = 2t^3 + 2t^2 + 2$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad S(t) = 2t^3 + 2t^2 + 2$$

(3)

(2)の結果より、

$$S'(t) = 6t^2 + 4t = 2t(3t + 2)$$

であるから、

$$\begin{aligned} S'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t(3t + 2) &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{2}{3}, 0 \end{aligned}$$

となることが分かる。したがって、 $S(t)$ の $-1 < t < 1$ での増減表は以下のようになる。

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

増減表より、 $S(t)$ は $t=0$ で極小値をとることが分かり、

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} S(t) = 2$$

$$S(0) = 2$$

であるから、 $S(t)$ は $t=0$ で最小値 $S(0)=2$ をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad t=0 \text{ のとき、最小値 } 2$$

(4)

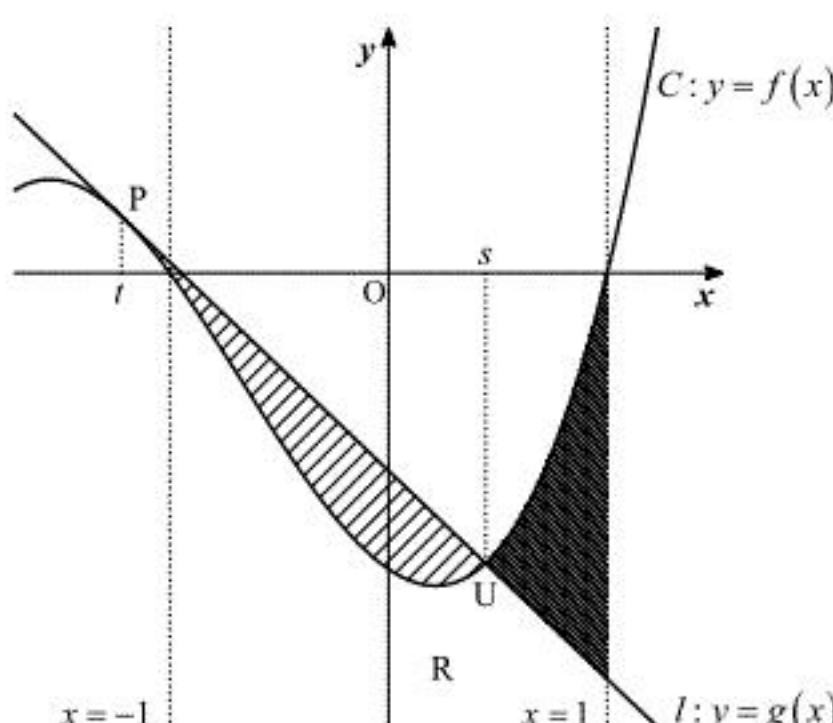
直線 l の方程式を $y=g(x)$ とおく。曲線 C と直線 l の交点のうち P と異なるものの x 座標は、

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (3t^2 + 4t - 1)x - 2t^3 - 2t^2 - 2 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - (3t^2 + 4t)x + 2t^3 + 2t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)\{x^2 + (t+2)x - 2t(t+1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)^2\{x + 2(t+1)\} &= 0 \\ \therefore x &= -2(t+1) \quad (\because x \neq t) \end{aligned}$$

と分かる。したがって、点 U が存在する条件は、

$$\begin{aligned} t &< -2(t+1) < 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &< t < -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。またこのとき、線分 PU と C とで囲まれる部分の面積を S_1 、線分 UR と C と直線 $x=1$ とで囲まれる部分の面積を S_2 とすると、 S_1, S_2 はそれぞれ以下の図の斜線部、打点部の面積である。



図より、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_t^s (g(x) - f(x)) dx \\ S_2 &= \int_s^1 (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

と表すことができるので、これらが等しくなるような t の値は、

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \int_t^s \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_s^1 \{f(x) - g(x)\} dx \\ \Leftrightarrow \int_t^1 \{f(x) - g(x)\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_t^1 \{x^3 + 2x^2 - (3t^2 + 4t)x + 2t^3 + 2t^2\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_t^1 (x-t)^2 \{x + 2(t+1)\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}(x-t)^3 \{x + 2(t+1)\} \right]_t^1 - \frac{1}{3} \int_t^1 (x-t)^3 dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1-t)^3 (2t+3) - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4}(x-t)^4 \right]_t^1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1-t)^3 (2t+3) - \frac{1}{12}(1-t)^4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-t)^3 \{4(2t+3) - (1-t)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-t)^3 (9t+11) &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{11}{9} \quad \left(\because -\frac{3}{2} < t < -\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad t \text{ の範囲: } -\frac{3}{2} < t < -\frac{2}{3}, \quad t \text{ の値: } t = -\frac{11}{9}$$