

1

(1)

$y = a - x$ であるから、 $x > 0, y > 0$ より、

$$0 < x < a$$

が成り立つ。 $y = a - x$ を与式に代入すると、

$$x \log x + y \log y = x \log x + (a - x) \log (a - x)$$

となるので、この式の $0 < x < a$ における最小値を求めればよい。ここで、 $0 < x < a$ で定義された関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = x \log x + (a - x) \log (a - x)$$

で定めると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log x + 1 - \log (a - x) - 1 \\ &= \log \frac{x}{a - x} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{a - x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	(a)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{a}{2}$ のときに最小値をとり、その値は、

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} \log \frac{a}{2} + \left(a - \frac{a}{2}\right) \log \left(a - \frac{a}{2}\right) = a \log \frac{a}{2}$$

であることがわかる。

(答) $a \log \frac{a}{2}$

(2)

$z > 0$ かつ $a - z = x + y > 0$ より、 z のとり得る値の範囲は $0 < z < a$ である。この範囲で z を固定すると、(1)において a を $a - z$ に置き換えて考えることで、 $x \log x + y \log y + z \log z$ は

$x = y = \frac{a - z}{2}$ のときに最小値をとり、その値は、

$$(a - z) \log \frac{a - z}{2} + z \log z$$

であることがわかる。したがって、 $0 < z < a$ で定義された関数 $g(z)$ を、

$$g(z) = (a - z) \log \frac{a - z}{2} + z \log z$$

で定め、 $g(z)$ の最小値を考えればよい。 $g'(z)$ は、

$$\begin{aligned} g'(z) &= -\log \frac{a - z}{2} - 1 + \log z + 1 \\ &= \log z - \log \frac{a - z}{2} \\ &= \log \frac{2z}{a - z} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g'(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log \frac{2z}{a - z} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2z}{a - z} &= 1 \\ \therefore z &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。これより、 $g(z)$ の増減表は以下のようになる。

z	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	(a)
$g'(z)$		$-$	0	$+$	
$g(z)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

増減表より、 $g(z)$ は $z = \frac{a}{3}$ のときに最小値をとり、その値は、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a}{3}\right) &= \left(a - \frac{a}{3}\right) \log \frac{a - \frac{a}{3}}{2} + \frac{a}{3} \log \frac{a}{3} \\ &= \frac{2a}{3} \log \frac{a}{3} + \frac{a}{3} \log \frac{a}{3} \\ &= a \log \frac{a}{3} \end{aligned}$$

であることがわかる。

(答) $a \log \frac{a}{3}$

2

(1)

題意より,

$$\begin{aligned}f_0(x) &= e^{\frac{x^2}{2}} \\ f_0'(x) &= \left(-\frac{x^2}{2}\right)' e^{\frac{x^2}{2}} = -xf_0(x) \\ f_0''(x) &= -x'f_0(x) - xf_0'(x) = (x^2 - 1)f_0(x)\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}-f_0''(x) + x^2 f_0(x) &= a_0 f_0(x) \\ \Leftrightarrow -(x^2 - 1)f_0(x) + x^2 f_0(x) &= a_0 f_0(x) \\ \Leftrightarrow f_0(x) &= a_0 f_0(x) \\ \therefore a_0 &= 1 \quad (\because f_0(x) \neq 0)\end{aligned}$$

と求めることができる。

(答) $a_0 = 1$

(2)

題意より,

$$\begin{aligned}f_n'(x) &= \left\{H_n(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right\}' \\ &= H_n'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + H_n(x)\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' \\ &= H_n'(x)e^{\frac{x^2}{2}} - xf_n(x)\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}xf_n(x) - f_n'(x) &= xf_n(x) - \left\{H_n'(x)e^{\frac{x^2}{2}} - xf_n(x)\right\} \\ &= 2xf_n(x) - H_n'(x)e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= 2xH_n(x)e^{\frac{x^2}{2}} - H_n'(x)e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= \left\{2xH_n(x) - H_n'(x)\right\}e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= H_{n+1}(x)e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= f_{n+1}(x)\end{aligned}$$

と変形できる。以上より, 題意は示された。

(証明終)

(3)

関数 $g(x)$ について, $-f''(x) + x^2 f(x) = af(x)$ より

$$\begin{aligned}g'(x) &= x'f(x) + xf'(x) - f''(x) \\ &= f(x) + xf'(x) - \{x^2 f(x) - af(x)\} \\ &= (1 + a - x^2)f(x) + xf'(x) \\ g''(x) &= -2xf'(x) + (1 + a - x^2)f'(x) + f'(x) + xf''(x) \\ &= -2xf'(x) + (1 + a - x^2)f'(x) \\ &\quad + f'(x) + x\{x^2 f(x) - af(x)\} \\ &= \{x^3 - (a + 2)x\}f(x) + (2 + a - x^2)f'(x)\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}-g''(x) + x^2 g(x) &= -\{x^3 - (a + 2)x\}f(x) - (2 + a - x^2)f'(x) \\ &\quad + x^2 \{xf'(x) - f''(x)\} \\ &= (a + 2)xf(x) - (a + 2)f'(x) \\ &= (a + 2)\{xf(x) - f'(x)\} \\ &= (a + 2)g(x)\end{aligned}$$

と変形できる。以上より, 題意は示された。

(証明終)

(4)

「任意の 0 以上の整数 n について, $a_n = 2n + 1$ のときに,

$$-f_n''(x) + x^2 f_n(x) = a_n f_n(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ」という命題を, 数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n = 0$ のとき

このとき, ①式は,

$$-f_0''(x) + x^2 f_0(x) = f_0(x)$$

となるが, (1)よりこれは確かに成り立つ。

[2] $n = k$ (k は 0 以上の整数)での①の成立を仮定するとき

このとき, 仮定より,

$$-f_k''(x) + x^2 f_k(x) = (2k + 1)f_k(x)$$

が成り立ち, (2)より,

$$f_{k+1}(x) = xf_k(x) - f_k'(x)$$

が成り立ち, $f_k(x)$ は 2 回微分可能より (3)における $a, f(x), g(x)$ をそれぞれ,

$$\begin{aligned}a &= 2k + 1 \\ f(x) &= f_k(x) \\ g(x) &= f_{k+1}(x)\end{aligned}$$

に置き換えることができる。すると, (3)より,

$$\begin{aligned}-g''(x) + x^2 g(x) &= (a + 2)g(x) \\ \Leftrightarrow -f_{k+1}''(x) + x^2 f_{k+1}(x) &= (2k + 3)f_{k+1}(x)\end{aligned}$$

を得る。よって, ①式は $n = k + 1$ の場合にも成り立つことが分かる。

以上 [1], [2] から, 数学的帰納法より, 任意の 0 以上の整数 n について $a_n = 2n + 1$ のときに①式

が成り立つことが示された。したがって, 求める定数 a_n は,

$$a_n = 2n + 1$$

である。

(答) $a_n = 2n + 1$

4つの複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対応する点をそれぞれ A, B, C, D とおく。 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ より、4点 A, B, C, D は単位円周上に存在する。

(1)

三角形 ABC が正三角形のとき、 $AB = AC$ より辺 BC の中点を K とおくと直線 AK は辺 BC の垂直二等分線上にある。また、原点 O は三角形 ABC の外心であるから辺 BC の垂直二等分線上にある。よって、点 O は直線 AK 上にある。同様にして、辺 CA の中点を L とおくと点 O は辺 CA の垂直二等分線 BL 上にある。したがって、原点 O は2つの中線 AK, BL の交点より、三角形 ABC の重心である。よって、

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

となる。

(証明終)

(2)

$z_1 + z_2 + z_3 = 0$ より $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 0$ となり、原点 O は三角形 ABC の重心である。よって、辺 BC

の中点を K とおくと原点 O は中線 AK 上にある。原点 O は三角形 ABC の外心より $OK \perp BC$ であるから中線 AK は辺 BC の垂直二等分線となる。したがって、 $AB = AC$ となる。同様にして、辺 CA の中点を L とおくと中線 BL は辺 CA の垂直二等分線より $BA = BC$ となる。したがって、 $AB = BC = CA$ となり、三角形 ABC は正三角形である。

(証明終)

(3)

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ より

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = -\frac{z_3 + z_4}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、線分 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とおく。

[1] $z_1 + z_2 = 0$ のとき

このとき、①式は、

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{z_3 + z_4}{2} = 0$$

となり、 $M = N = O$ である。よって、四角形 $ACBD$ において対角線 AB, CD が各々の中点 O で交わるので、四角形 $ACBD$ は平行四辺形である。

[2] $z_1 + z_2 \neq 0$ のとき

このとき、①式は、点 M と点 N が点 O に関して対称な点であることを表すので、3点 M, O, N は一直線上にある。 $OA = OB, AM = BM$ より $AB \perp OM$ である。また、 $OC = OD, CM = DM$ より $CD \perp ON$ である。よって、 $AB \parallel CD$ となる。さらに、 $OM = ON$ より $AB = CD$ となり、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。

以上、[1], [2]より、4点 A, B, C, D を頂点とする四角形は平行四辺形である。よって、この四角形はそれぞれの対角は等しい。ここで、この四角形は円に内接するのでそれぞれの対角の和は 180° よりそれぞれの角が直角となる。したがって、4点 A, B, C, D を頂点とする四角形は長方形である。

(証明終)

(1)

各目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ であるから、

$$E_1 = \sum_{i=1}^6 \left(i \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 i = \frac{7}{2}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) E_1 = \frac{7}{2}$$

(2)

m は 6 以下の自然数であるとして解く。

[1] 1 回目に m 未満の目が出るとき

2 回目の出る目の期待値は (1) より E_1 であるので、この場合の期待値は $\frac{m-1}{6} E_1$ である。

[2] 1 回目に m 以上の目が出るとき

1 回目に出た目を得点とするので、この場合の期待値は $\sum_{k=m}^6 k \cdot \frac{1}{6}$ である。

以上, [1], [2] より, 求める期待値は

$$\begin{aligned} E_2(m) &= \frac{m-1}{6} E_1 + \sum_{k=m}^6 k \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{7(m-1)}{12} + \frac{1}{6} \cdot \frac{(m+6)(6-m+1)}{2} \\ &= \frac{7(m-1) - m^2 + m + 42}{12} \\ &= \frac{-m^2 + 8m + 35}{12} \end{aligned}$$

となる。また、

$$E_2(m) = \frac{-m^2 + 8m + 35}{12} = -\frac{1}{12}(m-4)^2 + \frac{17}{4}$$

と変形できるので、 $E_2(m)$ は $m=4$ で最大値 $E_2(4) = \frac{17}{4}$ をとることがわかる。

$$(\text{答}) E_2(m) = \frac{-m^2 + 8m + 35}{12}, E_2(m) \text{ が最大となる } m: 4$$

(3)(i)

[1] 1 回目に m_2 未満の目が出るとき

2 回目以降の出る目の期待値は (2) において $m = m_1$ としたときの期待値より $E_2(m_1)$ であ

るので、この場合の期待値は $\frac{m_2-1}{6} E_2(m_1)$ である。

[2] 1 回目に m_2 以上の目が出るとき

1 回目に出た目を得点とするので、(2) よりこの場合の期待値は $\frac{1}{6} \cdot \frac{(m_2+6)(6-m_2+1)}{2}$ である。

以上, [1], [2] より, 求める期待値は

$$E_3(m_1, m_2) = \frac{m_2-1}{6} E_2(m_1) + \frac{1}{6} \cdot \frac{(m_2+6)(7-m_2)}{2}$$

となる。また、(2) の結果より $E_2(m_1)$ は $m_1=4$ で最大値 $\frac{17}{4}$ をとり、 m_1, m_2 は互いに独立な変数

であり、 $\frac{m_2-1}{6} \geq 0$ であるから、 $E_3(m_1, m_2)$ を最大とする m_2 は $E_3(4, m_2)$ を最大とする m_2 で

ある。 $E_3(4, m_2)$ は、

$$\begin{aligned} E_3(4, m_2) &= \frac{m_2-1}{6} \cdot \frac{17}{4} + \frac{(7-m_2)(m_2+6)}{12} \\ &= \frac{-2m_2^2 + 19m_2 + 67}{24} \\ &= -\frac{1}{12} \left(m_2 - \frac{19}{4} \right)^2 + \frac{897}{192} \end{aligned}$$

と変形できるので、これを最大とする m_2 は $\frac{19}{4}$ に最も近い自然数、すなわち $m_2=5$ であり、

$E_3(m_1, m_2)$ の最大値は、

$$E_3(4, 5) = \frac{-2 \cdot 5^2 + 19 \cdot 5 + 67}{24} = \frac{14}{3}$$

と求められる。

$$(\text{答}) E_3(m_1, m_2) = \frac{m_2-1}{6} E_2(m_1) + \frac{(7-m_2)(m_2+6)}{12}$$

$$m_1=4, m_2=5 \text{ のときに最大値: } \frac{14}{3}$$

(ii)

[1] 1 回目に m_{n-1} 未満の目が出るとき

2 回目以降の出る目の期待値は $n-1$ 回の場合と同様の状態より $E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2})$ である

ので、この場合の期待値は $\frac{m_{n-1}-1}{6} E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2})$ である。

[2] 1 回目に m_{n-1} 以上の目が出るとき

1 回目に出た目を得点とするので、(2) よりこの場合の期待値は $\frac{1}{6} \cdot \frac{(m_{n-1}+6)(6-m_{n-1}+1)}{2}$

である。

以上, [1], [2] より, 求める期待値は

$$\begin{aligned} E_n(m_1, \dots, m_{n-1}) \\ &= \frac{m_{n-1}-1}{6} E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2}) + \frac{1}{6} \cdot \frac{(m_{n-1}+6)(7-m_{n-1})}{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2})$ の最大値は e_{n-1} で、 $m_1, \dots, m_{n-1}$ は互いに独立な変数であり、

$\frac{m_{n-1}-1}{6} \geq 0$ であるから、 $E_n(m_1, \dots, m_{n-1})$ を最大とする $m_1, \dots, m_{n-2}$ は $E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2}) = e_{n-1}$

となるときの $m_1, \dots, m_{n-2}$ である。このような $m_1, \dots, m_{n-2}$ の組に対して、 $E_n(m_1, \dots, m_{n-1})$ は、

$$\begin{aligned} E_n(m_1, \dots, m_{n-1}) &= \frac{m_{n-1}-1}{6} e_{n-1} + \frac{(7-m_{n-1})(m_{n-1}+6)}{12} \\ &= \frac{-m_{n-1}^2 + (2e_{n-1}+1)m_{n-1} + 42 - 2e_{n-1}}{12} \\ &= -\frac{1}{12} \left(m_{n-1} - \frac{2e_{n-1}+1}{2} \right)^2 + \frac{(2e_{n-1}+1)^2}{48} + \frac{42-2e_{n-1}}{12} \end{aligned}$$

と変形できるので、これを最大とする m_{n-1} は $\frac{2e_{n-1}+1}{2}$ に最も近い自然数である。ここで、 e_{n-1}

以上の最小の自然数を M とすると、

$$\begin{aligned} M-1 &< e_{n-1} \leq M \\ \Leftrightarrow \frac{2(M-1)+1}{2} &< \frac{2e_{n-1}+1}{2} \leq \frac{2M+1}{2} \\ \therefore M - \frac{1}{2} &< \frac{2e_{n-1}+1}{2} \leq M + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つので、 M が $\frac{2e_{n-1}+1}{2}$ に最も近い自然数である。以上より、 $E_n(m_1, \dots, m_{n-1})$ が最大

となるのは、 $E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2}) = e_{n-1}$ でありかつ m_{n-1} が e_{n-1} 以上の最小の自然数となるときである。

(証明終)