

1

(1)

$y = a - x$ であるから、 $x > 0, y > 0$ より、

$$0 < x < a$$

が成り立つ。 $y = a - x$ を与式に代入すると、

$$x \log x + y \log y = x \log x + (a - x) \log (a - x)$$

となるので、この式の $0 < x < a$ における最小値を求めればよい。ここで、 $0 < x < a$ で定義された関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = x \log x + (a - x) \log (a - x)$$

で定めると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= x' \log x + x (\log x)' + (a - x)' \log (a - x) + (a - x) \{\log (a - x)\}' \\ &= \log x + 1 - \log (a - x) - 1 \\ &= \log \frac{x}{a - x} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{a - x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	(a)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{a}{2}$ のときに最小値をとり、その値は、

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} \log \frac{a}{2} + \left(a - \frac{a}{2}\right) \log \left(a - \frac{a}{2}\right) = a \log \frac{a}{2}$$

であることがわかる。

(答) $a \log \frac{a}{2}$

(2)

$z > 0$ かつ $a - z = x + y > 0$ より、 z のとり得る値の範囲は $0 < z < a$ である。この範囲で z を固定すると、(1)において a を $a - z$ に置き換えて考えることで、 $x \log x + y \log y + z \log z$ は

$x = y = \frac{a - z}{2}$ のときに最小値をとり、その値は、

$$(a - z) \log \frac{a - z}{2} + z \log z$$

であることがわかる。したがって、 $0 < z < a$ で定義された関数 $g(z)$ を、

$$g(z) = (a - z) \log \frac{a - z}{2} + z \log z$$

で定め、 $g(z)$ の最小値を考えればよい。 $g'(z)$ は、

$$\begin{aligned} g'(z) &= (a - z)' \log \frac{a - z}{2} + (a - z) \left(\log \frac{a - z}{2} \right)' + z' \log z + z (\log z)' \\ &= -\log \frac{a - z}{2} - 1 + \log z + 1 \\ &= \log z - \log \frac{a - z}{2} \\ &= \log \frac{2z}{a - z} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g'(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log \frac{2z}{a - z} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2z}{a - z} &= 1 \\ \therefore z &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。これより、 $g(z)$ の増減表は以下のようになる。

z	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	(a)
$g'(z)$		$-$	0	$+$	
$g(z)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

増減表より、 $g(z)$ は $z = \frac{a}{3}$ のときに最小値をとり、その値は、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a}{3}\right) &= \left(a - \frac{a}{3}\right) \log \frac{a - \frac{a}{3}}{2} + \frac{a}{3} \log \frac{a}{3} \\ &= \frac{2a}{3} \log \frac{a}{3} + \frac{a}{3} \log \frac{a}{3} \\ &= a \log \frac{a}{3} \end{aligned}$$

であることがわかる。

(答) $a \log \frac{a}{3}$

(1)

題意より,

$$f_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_0'(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' e^{-\frac{x^2}{2}} = -xf_0(x)$$

$$f_0''(x) = -x'f_0(x) - xf_0'(x) = (x^2 - 1)f_0(x)$$

が成り立つので,

$$-f_0''(x) + x^2 f_0(x) = a_0 f_0(x)$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - 1)f_0(x) + x^2 f_0(x) = a_0 f_0(x)$$

$$\Leftrightarrow f_0(x) = a_0 f_0(x)$$

$$\therefore a_0 = 1 \quad (\because f_0(x) \neq 0)$$

と求めることができる。

(答) $a_0 = 1$

(2)

題意より,

$$f_n'(x) = \left\{ H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right\}'$$

$$= H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + H_n(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)'$$

$$= H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - x f_n(x)$$

が成り立つので,

$$x f_n(x) - f_n'(x) = x f_n(x) - \left\{ H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - x f_n(x) \right\}$$

$$= 2x f_n(x) - H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= 2x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \left\{ 2x H_n(x) - H_n'(x) \right\} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= H_{n+1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= f_{n+1}(x)$$

と変形できる。以上より, 題意は示された。

(証明終)

(3)

関数 $g(x)$ について,

$$g'(x) = x f'(x) + x f'(x) - f''(x)$$

$$= f(x) + x f'(x) - \{x^2 f(x) - a f(x)\} \quad (\because -f''(x) + x^2 f(x) = a f(x))$$

$$= (1 + a - x^2) f(x) + x f'(x)$$

$$g''(x) = (1 + a - x^2)' f(x) + (1 + a - x^2) f'(x) + x f'(x) + x f''(x)$$

$$= -2x f(x) + (1 + a - x^2) f'(x) + f'(x) + x \{x^2 f(x) - a f(x)\}$$

$$= \{x^3 - (a + 2)x\} f(x) + (2 + a - x^2) f'(x)$$

となるから,

$$-g''(x) + x^2 g(x) = -\{x^3 - (a + 2)x\} f(x) - (2 + a - x^2) f'(x) + x^2 \{x f(x) - f'(x)\}$$

$$= (a + 2) x f(x) - (a + 2) f'(x)$$

$$= (a + 2) \{x f(x) - f'(x)\}$$

$$= (a + 2) g(x)$$

と変形できる。以上より, 題意は示された。

(証明終)

(4)

「任意の 0 以上の整数 n について, $a_n = 2n + 1$ のときに,

$$-f_n''(x) + x^2 f_n(x) = a_n f_n(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ」という命題を, 数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n = 0$ のとき

このとき, ①式は,

$$-f_0''(x) + x^2 f_0(x) = f_0(x)$$

となるが, (1)よりこれは確かに成り立つ。

[2] $n = k$ (k は 0 以上の整数)での①の成立を仮定するとき

このとき, 仮定より,

$$-f_k''(x) + x^2 f_k(x) = (2k + 1) f_k(x)$$

が成り立ち, (2)より,

$$f_{k+1}(x) = x f_k(x) - f_k'(x)$$

が成り立ち, $f_k(x)$ は 2 回微分可能より (3)における $a, f(x), g(x)$ をそれぞれ,

$$a = 2k + 1$$

$$f(x) = f_k(x)$$

$$g(x) = f_{k+1}(x)$$

に置き換えることができる。すると, (3)より,

$$-g''(x) + x^2 g(x) = (a + 2) g(x)$$

$$\Leftrightarrow -f_{k+1}''(x) + x^2 f_{k+1}(x) = (2k + 3) f_{k+1}(x)$$

を得る。よって, ①式は $n = k + 1$ の場合にも成り立つことが分かる。以上 [1], [2] から, 数学的帰納法より, 任意の 0 以上の整数 n について $a_n = 2n + 1$ のときに①式が成り立つことが示された。したがって, 求める定数 a_n は,

$$a_n = 2n + 1$$

である。

(答) $a_n = 2n + 1$