

(1)

命題「自然数 n に対し、 a_n は $\frac{1}{3} \leq a_n < \frac{1}{2}$ を満たす有理数である。」を (A) とする。数学的帰納法を用いて、(A) を示す。

[1] $n=1$ のとき

問題文より、 $a_1 = \frac{1}{3}$ であるから $\frac{1}{3} \leq a_1 < \frac{1}{2}$ を満たし、 a_1 は有理数であるから、(A) が成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

(A) が成り立つ、すなわち、

$$\frac{1}{3} \leq a_k < \frac{1}{2} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立ち、 a_k が有理数であると仮定する。ここで、 $n=k+1$ のとき問題文より、

$$a_{k+1} = \frac{1}{3-2a_k} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

となり、①式および②式を用いて、 a_{k+1} の不等式、

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{7} \leq a_{k+1} < \frac{1}{2}$$

が得られる。さらに、 a_k が有理数の時、 $3-2a_k$ も有理数であるから、 a_{k+1} も有理数となる。

したがって、 $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n に対して (A) が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

$a_n = \frac{p_n}{q_n}$ を式 $a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n}$ に代入することで、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{3-2 \cdot \frac{p_n}{q_n}} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{q_n}{3q_n-2p_n} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 a_{n+1} は既約分数の形で表されるから、 $\frac{q_n}{3q_n-2p_n}$ が既約分数かどうかを調べる。

p_n と $3q_n-2p_n$ の最大公約数 g と互いに素な自然数 a, b を用いて、

$$q_n = ga \qquad \cdots \textcircled{3}$$

$$3q_n-2p_n = gb \qquad \cdots \textcircled{4}$$

と表すと、③式および④式より、

$$2p_n = g(3a-b) \qquad \cdots \textcircled{5}$$

であり、 p_n と q_n が互いに素であるから、③式より p_n と g も互いに素である。したがって、 $3a-b$ は整数であるから、⑤式より g は1もしくは2のどちらかである。ここで、自然数 n に対し、 q_n は奇数であることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = \frac{1}{3}$ であるから $q_1 = 3$ となり、 q_n は奇数である。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

$$a_k = \frac{p_k}{q_k}$$

であり、 q_k が奇数であると仮定する。ここで、 $n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{q_k}{3q_k-2p_k}$$

となるが、 q_k が奇数であるから、 $3q_k$ も奇数であり、 $3q_k-2p_k$ も奇数となる。これより、

$a_{k+1} = \frac{q_k}{3q_k-2p_k}$ は分子、分母ともに奇数であるから、この分数が約分できる場合も含めて a_{k+1} を既約分数で表すと必ず分母は奇数となるので、 q_{k+1} は奇数である。したがって、

$n=k+1$ のときも q_n は奇数である。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n に対して q_n は奇数であることが成り立つことが示された。

これと③と g は1もしくは2のどちらかであることより、 $g=1$ となる。よって、 $\frac{q_n}{3q_n-2p_n}$

は既約分数となるから、

$$p_{n+1} = q_n, q_{n+1} = 3q_n-2p_n$$

と表せる。

(答) $p_{n+1} = q_n, q_{n+1} = 3q_n-2p_n$

(3)

(2)の結果より、 $p_{n+1} = q_n, q_{n+2} = 3q_{n+1}-2p_{n+1}$ であるから、 p_{n+1} を消去すると3項間漸化式、

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= 3q_{n+1}-2q_n \\ \Leftrightarrow q_{n+2}-q_{n+1} &= 2(q_{n+1}-q_n) \end{aligned}$$

が得られる。 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{3}{7}$ であるから、 $q_1 = 3, q_2 = 7$ である。したがって、 $q_2 - q_1 = 4$ である

から、階差数列の2項間漸化式、

$$q_{n+1} - q_n = 4 \cdot 2^{n-1}$$

が得られる。ここで、 $n \geq 2$ のとき、一般項 q_n は公式を用いて、

$$q_n = q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \cdot 2^{k-1} = 3 + 4 \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

となるから、 $p_{n+1} = q_n = 2^{n+1} - 1$ である。一方、 $n=1$ を代入したとき $q_1 = 2^{1+1} - 1 = 3, p_1 = 1$ となるから、すべての n に対して $p_n = 2^n - 1, q_n = 2^{n+1} - 1$ が成り立つ。以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は、

$$a_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$

2

(1)

a_n が素数となるときは、さいころを n 回ふって出た目のうち、1 回だけ素数である $2, 3, 5$ の中の 1 つが出て、残り $n-1$ 回はすべて 1 のときである。 $2, 3, 5$ が何回目が出るかは ${}_nC_1$ 通り存在するから、 a_n が素数になる確率は、

$${}_nC_1 \cdot \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{3n}{6^n}$$

である。

(答) $\frac{3n}{6^n}$

(2)

a_n が 3 の倍数となるのは、さいころを n 回ふって、少なくとも 1 回は 3 または 6 がでるときである。ここで、1 回も 3 または 6 が出ない確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

であるから、余事象を考えることで a_n が 3 の倍数となる確率は、

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

と求められる。

(答) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(3)

a_n を 6 で割った余りが 1 となる確率を求める。以下のように確率 p_n, q_n をおく。

p_n : a_n を 6 で割った余りが 1 となる確率

q_n : a_n を 6 で割った余りが 5 となる確率

a_n が 2 または 3 で割り切れるとき、 a_{n+1} も 2 または 3 で割り切れるから、 a_{n+1} を 6 で割った余りが 1 または 5 となるのは、 a_n を 6 で割った余りが 1 または 5 のときである。そして、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (n+1 \text{ 回目に } 1 \text{ が出る確率}) \cdot p_n + (n+1 \text{ 回目に } 5 \text{ が出る確率}) \cdot q_n \\ &= \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= (n+1 \text{ 回目に } 5 \text{ が出る確率}) \cdot p_n + (n+1 \text{ 回目に } 1 \text{ が出る確率}) \cdot q_n \\ &= \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、 $p_1 = q_1 = \frac{1}{6}$ であることから、

$$p_n = q_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。また、漸化式①、②の両辺を加えることで

$$p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{1}{3} (p_n + q_n)$$

となるから、

$$p_n + q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (p_1 + q_1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。したがって、③、④より、確率 p_n は

$$p_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(4)

まず、 $n=1$ のとき、さいころを 1 回だけふって出た目が $1 \sim 6$ のいずれであっても $a_1 < 10$ であるから、 $a_1 < 10$ となる確率は 1 である。次に、 $n=2$ のとき、さいころを 2 回ふって出た目の積が 10 未満になる目の組み合わせは、出る順番を考えると、

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)$$

の 17 通りである。全事象は 36 通りで、これらは同様に確からしいから、 $a_2 < 10$ となる確率は

$$\frac{17}{36}$$

である。最後に、 $n \geq 3$ のとき、1 以外の目が何回出たかによって場合分けを行う。

[1] 1 以外の目が 1 回も出なかったとき

$$a_n = 1^n = 1 \text{ であるから } a_n < 10 \text{ となる確率は、} \left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ である。}$$

[2] 1 以外の目が 1 回だけ出たとき

出た 1 以外の目が $2 \sim 6$ のいずれであっても $a_n < 10$ を満たす。 $2 \sim 6$ が何回目が出るかは ${}_nC_1$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 5n \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

となる。

[3] 1 以外の目が 2 回出たとき

出た 1 以外の目の積が 10 未満になる組み合わせは、

$$(2, 2), (3, 3) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(2, 3), (2, 4) \quad \cdots \textcircled{2}$$

の 4 通りである。これが出る順番は、①のときは ${}_nC_2$ 通り存在して、②のときは ${}_nP_2$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + {}_nP_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} = 3n(n-1) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

である。

[3] 1 以外の目が 3 回出たとき

出た 1 以外の目の積が 10 未満になる組み合わせは、 $(2, 2, 2)$ の 1 通りである。これが出る順番は、 ${}_nC_3$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-3} = n(n-1)(n-2) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

である。

[4] 1 以外の目が 4 回以上出たとき

$a_n < 10$ となることはないから、 $a_n < 10$ となる確率は 0 である。

以上、[1], [2], [3], [4] より各場合はそれぞれ排反な事象であるから、 $n \geq 3$ のとき、 $a_n < 10$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n + 5n \left(\frac{1}{6}\right)^n + 3n(n-1) \left(\frac{1}{6}\right)^n + n(n-1)(n-2) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} = (n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

である。

(答) $n=1$ のとき : 1, $n=2$ のとき : $\frac{17}{36}$, $n \geq 3$ のとき : $(n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$

(1)

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + 1$$

である。ここで、 $x=1$ における $y=f(x)$ の接線の式は、

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = (3a + 2b + 5)x + (-2a - b - 3) \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、 $x=-1$ における $y=f(x)$ の接線の式は、

$$y - f(-1) = f'(-1)\{x - (-1)\}$$

$$\Leftrightarrow y = (3a - 2b - 3)x + (2a - b - 3) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。問題文より、 $x=1$ における接線の式と $x=-1$ における接線の式が一致、すなわち①式と②式の傾きと y 切片が一致するから、

$$\begin{cases} 3a + 2b + 5 = 3a - 2b - 3 \\ -2a - b - 3 = 2a - b - 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = 0, b = -2$$

となる。また、接線 l の方程式は、①式および②式に $a=0, b=-2$ を代入することで、

$$y = x - 1$$

と求められる。

(答) $a=0, b=-2$, 接線 l の方程式: $y = x - 1$

(2)

(1)の結果より、 $f(x) = x^4 - 2x^2 + x$, $f'(x) = 4x^3 - 4x + 1$ である。傾きが1の接線の接点を t ($\neq \pm 1$) とすると、 t の方程式、

$$f'(t) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4t^3 - 4t + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow t(t+1)(t-1) = 0$$

が得られ、 $t \neq \pm 1$ であるから $t=0$ と求められる。したがって、求める接線の方程式は、

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

である。

(答) $y = x$

(3)

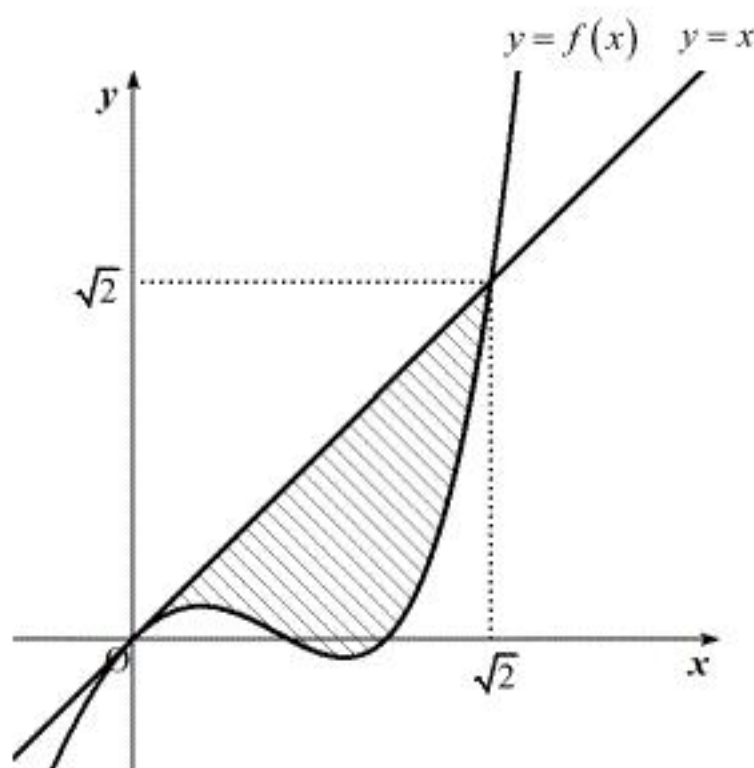
直線 $y=x$ と曲線 $y=f(x)$ の $x=0$ 以外における共有点の x 座標を求める。2式から y を消去することで、 x の方程式

$$x = f(x)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$$

が得られ、 $x \neq 0$ より $x = \pm\sqrt{2}$ と求められる。以下に、面積を求める範囲を斜線部で示す。ただし、境界線は含む。



上図より、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}} (x - f(x)) dx \\ &= -\int_0^{\sqrt{2}} (x^4 - 2x^2) dx \\ &= -\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8\sqrt{2}}{15}$