

(1)

命題「自然数 n に対し、 a_n は $\frac{1}{3} \leq a_n < \frac{1}{2}$ を満たす有理数である。」を (A) とする。数学的帰納法を用いて、(A) を示す。

[1] $n=1$ のとき

問題文より、 $a_1 = \frac{1}{3}$ であるから $\frac{1}{3} \leq a_1 < \frac{1}{2}$ を満たし、 a_1 は有理数であるから、(A) が成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

(A) が成り立つ、すなわち、

$$\frac{1}{3} \leq a_k < \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立ち、 a_k が有理数であると仮定する。ここで、 $n=k+1$ のとき問題文より、

$$a_{k+1} = \frac{1}{3-2a_k} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、①式および②式を用いて、 a_{k+1} の不等式、

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{7} \leq a_{k+1} < \frac{1}{2}$$

が得られる。さらに、 a_k が有理数の時、 $3-2a_k$ も有理数であるから、 a_{k+1} も有理数となる。したがって、 $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n に対して (A) が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

$a_n = \frac{p_n}{q_n}$ を式 $a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n}$ に代入することで、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{3-2 \cdot \frac{p_n}{q_n}} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{q_n}{3q_n-2p_n} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 a_{n+1} は既約分数の形で表されるから、 $\frac{q_n}{3q_n-2p_n}$ が既約分数かどうかを調べる。 p_n と $3q_n-2p_n$ の最大公約数 g と互いに素な自然数 a, b を用いて、

$$q_n = ga \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$3q_n - 2p_n = gb \quad \cdots \textcircled{4}$$

と表すと、③式および④式より、

$$2p_n = g(3a-b) \quad \cdots \textcircled{5}$$

であり、 p_n と q_n が互いに素であるから、③式より p_n と g も互いに素である。したがって、 $3a-b$ は整数であるから、⑤式より g は1もしくは2のどちらかである。ここで、自然数 n に対し、 q_n は奇数であることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = \frac{1}{3}$ であるから $q_1 = 3$ となり、 q_n は奇数である。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

$$a_k = \frac{p_k}{q_k}$$

であり、 q_k が奇数であると仮定する。ここで、 $n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{q_k}{3q_k-2p_k}$$

となるが、 q_k が奇数であるから、 $3q_k$ も奇数であり、 $3q_k-2p_k$ も奇数となる。これより、

$a_{k+1} = \frac{q_k}{3q_k-2p_k}$ は分子、分母ともに奇数であるから、この分数が約分できる場合も含めて

a_{k+1} を既約分数で表すと必ず分母は奇数となるので、 q_{k+1} は奇数である。したがって、 $n=k+1$ のときも q_n は奇数である。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n に対して q_n は奇数であることが成り立つことが示された。

これと③と g は1もしくは2のどちらかであることより、 $g=1$ となる。よって、 $\frac{q_n}{3q_n-2p_n}$

は既約分数となるから、

$$p_{n+1} = q_n, q_{n+1} = 3q_n - 2p_n$$

と表せる。

(答) $p_{n+1} = q_n, q_{n+1} = 3q_n - 2p_n$

(3)

(2)の結果より、 $p_{n+1} = q_n, q_{n+2} = 3q_{n+1} - 2p_{n+1}$ であるから、 p_{n+1} を消去すると3項間漸化式、

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= 3q_{n+1} - 2q_n \\ \Leftrightarrow q_{n+2} - q_{n+1} &= 2(q_{n+1} - q_n) \end{aligned}$$

が得られる。 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{3}{7}$ であるから、 $q_1 = 3, q_2 = 7$ である。したがって、数列 $\{q_{n+1} - q_n\}$ は、

初項 $q_2 - q_1 = 4$ 、公比2の等比数列であるから、

$$q_{n+1} - q_n = 4 \cdot 2^{n-1}$$

が成り立つ。ここで、 $n \geq 2$ のとき、一般項 q_n は階差数列の公式を用いて、

$$q_n = q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \cdot 2^{k-1} = 3 + 4 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

となるから、 $q_n = 2^{n+1} - 1$ ($n \geq 2$) である。一方、 $n=1$ を代入したとき、 $q_1 = 2^{1+1} - 1 = 3$ となるから、 $q_n = 2^{n+1} - 1$ は $n=1$ でも成り立つ。したがって、すべての n に対して $q_n = 2^{n+1} - 1$ が成り立つ。また、 $p_{n+1} = q_n$ より、すべての n に対して $p_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ 、すなわち $p_n = 2^n - 1$ ($n \geq 2$) が

成り立ち、 $a_1 = \frac{1}{3}$ より、 $p_1 = 1$ であるから、 $p_n = 2^n - 1$ は $n=1$ でも成り立つ。したがって、

$p_n = 2^n - 1$ である。以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は、

$$a_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$

(1)

a_n が素数となるときは、さいころを n 回ふって出た目のうち、1 回だけ素数である 2, 3, 5 の中の 1 つが出て、残り $n-1$ 回はすべて 1 のときである。2, 3, 5 が何回目で出るかは ${}_nC_1$ 通り存在するから、 a_n が素数になる確率は、

$${}_nC_1 \cdot \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{3n}{6^n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3n}{6^n}$$

(2)

a_n が 3 の倍数となるのは、さいころを n 回ふって、少なくとも 1 回は 3 または 6 がでるときである。ここで、1 回も 3 または 6 が出ない確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

であるから、余事象を考えることで a_n が 3 の倍数となる確率は、

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3)

6 で割って 1 余る数は 2 の倍数でも 3 の倍数でもないから、 a_n が 6 で割って 1 余る数であるとき、 n 個の出た目に 2, 3, 4, 6 は含まれていない。また、

$$5^m \equiv (-1)^m \pmod{6}$$

であるから、 5^m について、 m が奇数の時は、 5^m を 6 で割った余りは 5 になり、 m が偶数の時は、 5^m を 6 で割った余りは 1 になることがわかる。したがって、 a_n が 6 で割って 1 余る数であるときは、さいころを n 回ふって 5 が偶数回 (0 回を含む) 出て、残りはすべて 1 のときである。いま、 n の偶奇によって場合分けを行う。

[1] $n = 2k$ (k は自然数) のとき

5 が $2l$ 回出るとすると、5 が何回目で出るかは ${}_{2k}C_{2l}$ 通り存在する。 $l = 0, 1, 2, \dots, k$ の各場合において事象は互いに排反であるから、求める確率は、

$$\sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k-2l} = \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2k} \cdot \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l}$$

となる。ここで、 $\sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l}$ に関して、

$$2^{2k} = (1+1)^{2k} = {}_{2k}C_0 + {}_{2k}C_1 + \dots + {}_{2k}C_{2k-1} + {}_{2k}C_{2k} = \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} + \sum_{l=1}^k {}_{2k}C_{2l-1}$$

$$0^{2k} = (1-1)^{2k} = {}_{2k}C_0 - {}_{2k}C_1 + \dots - {}_{2k}C_{2k-1} + {}_{2k}C_{2k} = \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} - \sum_{l=1}^k {}_{2k}C_{2l-1}$$

であるから、 $\sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} = 2^{2k-1}$ とわかる。したがって、 $n = 2k$ (k は自然数) のとき a_n が 6 で

割って 1 余る数になる確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{2k} \cdot \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} = 2^{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

[2] $n = 2k+1$ (k は 0 以上の整数) のとき

5 が $2l$ 回出るとすると、5 が何回目で出るかは ${}_{2k+1}C_{2l}$ 通り存在する。 $l = 0, 1, 2, \dots, k$ の各場合において事象は互いに排反であるから、求める確率は、

$$\sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{(2k+1)-2l} = \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l}$$

となる。ここで、 $\sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l}$ に関して、

$$2^{2k+1} = (1+1)^{2k+1} = {}_{2k+1}C_0 + {}_{2k+1}C_1 + \dots + {}_{2k+1}C_{2k} + {}_{2k+1}C_{2k+1} = \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} + \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l+1}$$

$$0^{2k+1} = (1-1)^{2k+1} = {}_{2k+1}C_0 - {}_{2k+1}C_1 + \dots + {}_{2k+1}C_{2k} - {}_{2k+1}C_{2k+1} = \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} - \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l+1}$$

であるから、 $\sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} = 2^{2k}$ とわかる。したがって、 $n = 2k+1$ (k は 0 以上の整数) のとき

a_n が 6 で割って 1 余る数になる確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} = 2^{2k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

以上、[1], [2] より a_n が 6 で割って 1 余る数になる確率は、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(4)

a_n を 7 で割った余りが l ($l = 0, 1, 2, \dots, 6$) になる確率を $p_n(l)$ とおく。 a_n の素因数に 7 が含まれることはないから、 $p_n(0) = 0$ である。以下、 $l = 1, 2, \dots, 6$ の場合を考える。 n 回目で余りが l のとき、 a_{n+1} を 7 で割った余りが 1 になるために、 $n+1$ 回目で必要な目を以下の表に示す。

a_n を 7 で割った余り (l)	$n+1$ 回目で必要な目
1	1
2	4
3	5
4	2
5	3
6	6

表より、 $p_{n+1}(1)$ は、

$$\begin{aligned} p_{n+1}(1) &= \frac{1}{6} p_n(1) + \frac{1}{6} p_n(2) + \frac{1}{6} p_n(3) + \frac{1}{6} p_n(4) + \frac{1}{6} p_n(5) + \frac{1}{6} p_n(6) \\ &= \frac{1}{6} \{p_n(1) + p_n(2) + p_n(3) + p_n(4) + p_n(5) + p_n(6)\} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。また、 $n=1$ のとき $a_1=1$ とあればよいから、 $p_1(1) = \frac{1}{6}$ となる。以上より、 a_n を 7 で割

った余りが 1 になる確率は n の値によらず $\frac{1}{6}$ であることが示された。

(証明終)

(5)

まず、 $n=1$ のとき、さいころを 1 回だけふって出た目が 1~6 のいずれであっても $a_1 < 10$ であるから、 $a_1 < 10$ となる確率は 1 である。次に、 $n=2$ のとき、さいころを 2 回ふって出た目の積が 10 未満になる目の組み合わせは、出る順番を考えると、

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$$

$$(4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)$$

の 17 通りである。全事象は 36 通りで、これらは同様に確からしいから、 $a_2 < 10$ となる確率は

$\frac{17}{36}$ である。最後に、 $n \geq 3$ のとき、1 以外の目が何回出たかによって場合分けを行う。

[1] 1 以外の目が 1 回も出なかったとき

$a_n = 1^n = 1$ であるから $a_n < 10$ となる確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

[2] 1 以外の目が 1 回だけ出たとき

出た 1 以外の目が 2~6 のいずれであっても $a_n < 10$ を満たす。2~6 が何回目で出るかは ${}_nC_1$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 5n \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

となる。

[3] 1 以外の目が 2 回出たとき

出た 1 以外の目の積が 10 未満になる組み合わせは、

$$(2, 2), (3, 3) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(2, 3), (2, 4) \quad \dots \textcircled{2}$$

の 4 通りである。これが出る順番は、 $\textcircled{1}$ のときは ${}_nC_2$ 通り存在して、 $\textcircled{2}$ のときは ${}_nP_2$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + {}_nP_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} = 3n(n-1) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

である。

[3] 1 以外の目が 3 回出たとき

出た 1 以外の目の積が 10 未満になる組み合わせは、 $(2, 2, 2)$ の 1 通りである。これが出る順番は、 ${}_nC_3$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-3} = n(n-1)(n-2) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

である。

[4] 1 以外の目が 4 回以上出たとき

$a_n < 10$ となることはないから、 $a_n < 10$ となる確率は 0 である。

以上、[1], [2], [3], [4] より各場合はそれぞれ排反な事象であるから、 $n \geq 3$ のとき、 $a_n < 10$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n + 5n \left(\frac{1}{6}\right)^n + 3n(n-1) \left(\frac{1}{6}\right)^n + n(n-1)(n-2) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} = (n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad n=1 \text{ のとき} : 1, \quad n=2 \text{ のとき} : \frac{17}{36}, \quad n \geq 3 \text{ のとき} : (n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

$f(x) = \sqrt{x} \sin x$, $g(x) = \sqrt{x} \cos x$ とする。 $y = f(x)$ のグラフは、 $\sin x$ のグラフを y 軸方向に $\sqrt{x}$ 倍したものであり、 $y = g(x)$ のグラフは、 $\cos x$ のグラフを y 軸方向に $\sqrt{x}$ 倍したものである。また、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の共有点の x 座標は、2つの式から y を消去することで、 x の方程式

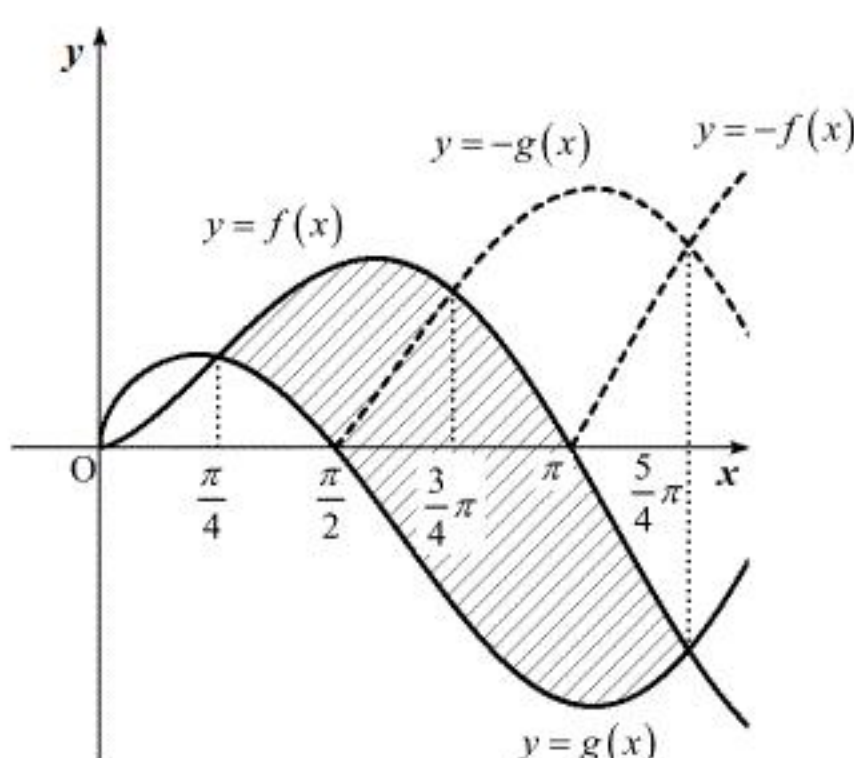
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sin x - \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

が得られ、 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ の範囲では $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ となる。以下に、 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$

のグラフの概形と、 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ の範囲でその2つに囲まれた部分を斜線部で示す。また、太い点線は2つのグラフの $y \leq 0$ の部分を x 軸で折り返したものである。なお、グラフ中の $y = f(x)$ と $y = -g(x)$ の交点の x 座標は、2つの式から y を消去した x の方程式

$$\begin{aligned} f(x) &= -g(x) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sin x + \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

の $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ における解 $x = \frac{3}{4}\pi$ として求めた。



上図より、回転体であるから折り返した部分を考慮し、求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \{f(x)\}^2 dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2 dx + \pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \{-g(x)\}^2 dx - \pi \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \{-f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} x \sin^2 x dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx + \pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} x \cos^2 x dx - \pi \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} x \sin^2 x dx \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int x \sin^2 x dx &= \int x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{4} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C \\ \int x \cos^2 x dx &= \int x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{4} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + D \end{aligned}$$

である。ここで、 C, D は積分定数である。よって、 V は、

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} - \pi \left[\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \pi \left[\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} - \pi \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x \right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} (\pi^2 + 2\pi) - \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{8} \pi^2 - \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{8} (2\pi^2 + 4\pi) - \frac{\pi}{8} \left(\frac{9}{8} \pi^2 - \frac{5}{2} \pi + 1 \right) \\ &= \frac{3}{16} \pi^3 + \frac{9}{8} \pi^2 \\ &= \frac{3\pi^2 (\pi + 6)}{16} \end{aligned}$$

となる。