

(1)

命題「自然数 n に対し、 a_n は $\frac{1}{3} \leq a_n < \frac{1}{2}$ を満たす有理数である。」を (A) とする。数学的帰納法を用いて、(A) を示す。

[1] $n=1$ のとき

問題文より、 $a_1 = \frac{1}{3}$ であるから $\frac{1}{3} \leq a_1 < \frac{1}{2}$ を満たし、 a_1 は有理数であるから、(A) が成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

(A) が成り立つ、すなわち、

$$\frac{1}{3} \leq a_k < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立ち、 a_k が有理数であると仮定する。ここで、 $n=k+1$ のとき問題文より、

$$a_{k+1} = \frac{1}{3-2a_k} \quad \dots \textcircled{2}$$

となり、①式および②式を用いて、 a_{k+1} の不等式、

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{7} \leq a_{k+1} < \frac{1}{2}$$

が得られる。さらに、 a_k が有理数の時、 $3-2a_k$ も有理数であるから、 a_{k+1} も有理数となる。したがって、 $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n に対して (A) が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

$a_n = \frac{p_n}{q_n}$ を式 $a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n}$ に代入することで、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{3-2 \cdot \frac{p_n}{q_n}} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{q_n}{3q_n-2p_n} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 a_{n+1} は既約分数の形で表されるから、 $\frac{q_n}{3q_n-2p_n}$ が既約分数かどうかを調べる。 p_n と $3q_n-2p_n$ の最大公約数 g と互いに素な自然数 a, b を用いて、

$$q_n = ga \quad \dots \textcircled{3}$$

$$3q_n - 2p_n = gb \quad \dots \textcircled{4}$$

と表すと、③式および④式より、

$$2p_n = g(3a-b) \quad \dots \textcircled{5}$$

であり、 p_n と q_n が互いに素であるから、③式より p_n と g も互いに素である。したがって、 $3a-b$ は整数であるから、⑤式より g は1もしくは2のどちらかである。ここで、自然数 n に対し、 q_n は奇数であることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = \frac{1}{3}$ であるから $q_1 = 3$ となり、 q_n は奇数である。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

$$a_k = \frac{p_k}{q_k}$$

であり、 q_k が奇数であると仮定する。ここで、 $n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{q_k}{3q_k-2p_k}$$

となるが、 q_k が奇数であるから、 $3q_k$ も奇数であり、 $3q_k-2p_k$ も奇数となる。これより、

$$a_{k+1} = \frac{q_k}{3q_k-2p_k}$$

は分子、分母ともに奇数であるから、この分数が約分できる場合も含めて a_{k+1} を既約分数で表すと必ず分母は奇数となるので、 q_{k+1} は奇数である。したがって、 $n=k+1$ のときも q_n は奇数である。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n に対して q_n は奇数であることが成り立つことが示された。

これと③と g は1もしくは2のどちらかであることより、 $g=1$ となる。よって、 $\frac{q_n}{3q_n-2p_n}$

は既約分数となるから、

$$p_{n+1} = q_n, q_{n+1} = 3q_n - 2p_n$$

と表せる。

(答) $p_{n+1} = q_n, q_{n+1} = 3q_n - 2p_n$

(3)

(2)の結果より、 $p_{n+1} = q_n, q_{n+2} = 3q_{n+1} - 2p_{n+1}$ であるから、 p_{n+1} を消去すると3項間漸化式、

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= 3q_{n+1} - 2q_n \\ \Leftrightarrow q_{n+2} - q_{n+1} &= 2(q_{n+1} - q_n) \end{aligned}$$

が得られる。 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{3}{7}$ であるから、 $q_1 = 3, q_2 = 7$ である。したがって、 $q_2 - q_1 = 4$ である

から、階差数列の2項間漸化式、

$$q_{n+1} - q_n = 4 \cdot 2^{n-1}$$

が得られる。ここで、 $n \geq 2$ のとき、一般項 q_n は公式を用いて、

$$q_n = q_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \cdot 2^{k-1} = 3 + 4 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

となるから、 $p_{n+1} = q_n = 2^{n+1} - 1$ である。一方、 $n=1$ を代入したとき $q_1 = 2^{1+1} - 1 = 3, p_1 = 1$ となるから、すべての n に対して $p_n = 2^n - 1, q_n = 2^{n+1} - 1$ が成り立つ。以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は、

$$a_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$

2

- (1) a_n が素数となるときは、さいころを n 回ふって出た目のうち、1 回だけ素数である 2, 3, 5 の中の 1 つが出て、残り $n-1$ 回はすべて 1 のときである。2, 3, 5 が何回目が出るかは ${}_nC_1$ 通り存在するから、 a_n が素数になる確率は、

$${}_nC_1 \cdot \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{3n}{6^n}$$

である。

(答) $\frac{3n}{6^n}$

- (2) a_n が 3 の倍数となるのは、さいころを n 回ふって、少なくとも 1 回は 3 または 6 がでるときである。ここで、1 回も 3 または 6 が出ない確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

であるから、余事象を考えることで a_n が 3 の倍数となる確率は、

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

と求められる。

(答) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- (3) 6 で割って 1 余る数は 2 の倍数でも 3 の倍数でもないから、 a_n が 6 で割って 1 余る数であるとき、 n 個の出た目に 2, 3, 4, 6 は含まれていない。また、

$$5^m = (-1)^m \pmod{6}$$

であるから、 5^m について、 m が奇数の時は、 5^m を 6 で割った余りは 5 になり、 m が偶数の時は、 5^m を 6 で割った余りは 1 になることがわかる。したがって、 a_n が 6 で割って 1 余る数であるときは、さいころを n 回ふって 5 が偶数回 (0 回を含む) 出て、残りはすべて 1 のときである。いま、 n の偶奇によって場合分けを行う。

- [1] $n = 2k$ (k は自然数) のとき

5 が $2l$ 回出るとすると、5 が何回目が出るかは ${}_{2k}C_{2l}$ 通り存在する。 $l = 0, 1, 2, \dots, k$ の各場合において事象は互いに排反であるから、求める確率は、

$$\sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k-2l} = \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2k} \cdot \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l}$$

となる。ここで、 $\sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l}$ に関して、

$$2^{2k} = (1+1)^{2k} = {}_{2k}C_0 + {}_{2k}C_1 + \dots + {}_{2k}C_{2k-1} + {}_{2k}C_{2k} = \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} + \sum_{l=1}^k {}_{2k}C_{2l-1}$$

$$0^{2k} = (1-1)^{2k} = {}_{2k}C_0 - {}_{2k}C_1 + \dots - {}_{2k}C_{2k-1} + {}_{2k}C_{2k} = \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} - \sum_{l=1}^k {}_{2k}C_{2l-1}$$

であるから、 $\sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} = 2^{2k-1}$ とわかる。したがって、 $n = 2k$ (k は自然数) のとき a_n が 6 で割って 1 余る数になる確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{2k} \cdot \sum_{l=0}^k {}_{2k}C_{2l} = 2^{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

- [2] $n = 2k+1$ (k は自然数) のとき

5 が $2l$ 回出るとすると、5 が何回目が出るかは ${}_{2k+1}C_{2l}$ 通り存在する。 $l = 0, 1, 2, \dots, k$ の各場合において事象は互いに排反であるから、求める確率は、

$$\sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{(2k+1)-2l} = \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l}$$

となる。ここで、 $\sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l}$ に関して、

$$2^{2k+1} = (1+1)^{2k+1} = {}_{2k+1}C_0 + {}_{2k+1}C_1 + \dots + {}_{2k+1}C_{2k} + {}_{2k+1}C_{2k+1} = \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} + \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l+1}$$

$$0^{2k+1} = (1-1)^{2k+1} = {}_{2k+1}C_0 - {}_{2k+1}C_1 + \dots + {}_{2k+1}C_{2k} - {}_{2k+1}C_{2k+1} = \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} - \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l+1}$$

であるから、 $\sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} = 2^{2k}$ とわかる。したがって、 $n = 2k+1$ (k は自然数) のとき a_n が 6 で割って 1 余る数になる確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^k {}_{2k+1}C_{2l} = 2^{2k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

以上、[1], [2] より a_n が 6 で割って 1 余る数になる確率は、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(答) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

- (4) a_n を 7 で割った余りが l ($l = 0, 1, 2, \dots, 6$) になる確率を $p_n(l)$ とおく。 a_n の素因数に 7 が含まれることはないから、 $p_n(0) = 0$ である。以下、 $l = 1, 2, \dots, 6$ の場合を考える。 n 回目で余りが l のとき、 a_{n+1} を 7 で割った余りが 1 になるために、 $n+1$ 回目で必要な目を以下の表に示す。

a_n を 7 で割った余り (l)	$n+1$ 回目で必要な目
1	1
2	4
3	5
4	2
5	3
6	6

表より、 $p_{n+1}(1)$ は、

$$\begin{aligned} p_{n+1}(1) &= \frac{1}{6} p_n(1) + \frac{1}{6} p_n(2) + \frac{1}{6} p_n(3) + \frac{1}{6} p_n(4) + \frac{1}{6} p_n(5) + \frac{1}{6} p_n(6) \\ &= \frac{1}{6} \{ p_n(1) + p_n(2) + p_n(3) + p_n(4) + p_n(5) + p_n(6) \} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。また、 $n=1$ のとき $a_1=1$ となればよいから、 $p_1(1) = \frac{1}{6}$ となる。以上より、 a_n を 7 で割った余りが 1 になる確率は n の値によらず $\frac{1}{6}$ であることが示された。

(証明終)

- (5) まず、 $n=1$ のとき、さいころを 1 回だけふって出た目が 1~6 のいずれであっても $a_1 < 10$ であるから、 $a_1 < 10$ となる確率は 1 である。次に、 $n=2$ のとき、さいころを 2 回ふって出た目の積が 10 未満になる目の組み合わせは、出る順番を考えると、

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$$

$$(4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)$$

の 17 通りである。全事象は 36 通りで、これらは同様に確からしいから、 $a_2 < 10$ となる確率は $\frac{17}{36}$ である。最後に、 $n \geq 3$ のとき、1 以外の目が何回出たかによって場合分けを行う。

- [1] 1 以外の目が 1 回も出なかったとき

$a_n = 1^n = 1$ であるから $a_n < 10$ となる確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

- [2] 1 以外の目が 1 回だけ出たとき

出た 1 以外の目が 2~6 のいずれであっても $a_n < 10$ を満たす。2~6 が何回目が出るかは ${}_nC_1$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 5n \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

となる。

- [3] 1 以外の目が 2 回出たとき

出た 1 以外の目の積が 10 未満になる組み合わせは、

$$(2, 2), (3, 3) \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$(2, 3), (2, 4) \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

の 4 通りである。これが出る順番は、 $\textcircled{1}$ のときは ${}_nC_2$ 通り存在して、 $\textcircled{2}$ のときは ${}_nP_2$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + {}nP_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} = 3n(n-1) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

である。

- [3] 1 以外の目が 3 回出たとき

出た 1 以外の目の積が 10 未満になる組み合わせは、 $(2, 2, 2)$ の 1 通りである。これが出る順番は、 ${}_nC_3$ 通り存在するから、 $a_n < 10$ となる確率は、

$${}_nC_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-3} = n(n-1)(n-2) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

である。

- [4] 1 以外の目が 4 回以上出たとき

$a_n < 10$ となることはないから、 $a_n < 10$ となる確率は 0 である。

以上、[1], [2], [3], [4] より各場合はそれぞれ排反な事象であるから、 $n \geq 3$ のとき、 $a_n < 10$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n + 5n \left(\frac{1}{6}\right)^n + 3n(n-1) \left(\frac{1}{6}\right)^n + n(n-1)(n-2) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} = (n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

である。

(答) $n=1$ のとき : 1, $n=2$ のとき : $\frac{17}{36}$, $n \geq 3$ のとき : $(n^3 + 15n^2 + 14n + 6) \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$

(1)

$h(x) = f(x) - g(x)$ とすると、 $h(x)$ は、

$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{b} \text{ のとき: } h(x) = 2 - ax + (bx - 2) = (b-a)x \\ x \geq \frac{2}{b} \text{ のとき: } h(x) = 2 - ax - (bx - 2) = -(a+b)x + 4 \end{cases}$$

となる。以下、 x の範囲によって場合分けを行う。

[1] $x \leq \frac{2}{b}$ のとき

$0 < a < b$ より、直線 $y = h(x) = (b-a)x$ の傾きは正であるから、 $h(x) \geq 1$ を満たす x が存在するためには最大値が 1 以上、すなわち $h\left(\frac{2}{b}\right) \geq 1$ となければよい。したがって、求める条件は、

$$\begin{aligned} h\left(\frac{2}{b}\right) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2(b-a)}{b} &\geq 1 \\ \therefore b &\geq 2a \end{aligned}$$

となる。

[2] $x \geq \frac{2}{b}$ のとき

$0 < a < b$ より、直線 $y = h(x) = -(a+b)x + 4$ の傾きは負であるから、 $h(x) \geq 1$ を満たす x が存在するためには最大値が 1 以上、すなわち $h\left(\frac{2}{b}\right) \geq 1$ となければよい。したがって、求める条件は、

$$\begin{aligned} h\left(\frac{2}{b}\right) &\geq 1 \\ \therefore b &\geq 2a \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2] を合わせることで、 $h(x) \geq 1$ を満たす x が存在するための条件は $b \geq 2a$ となる。

(答) $b \geq 2a$

(2)

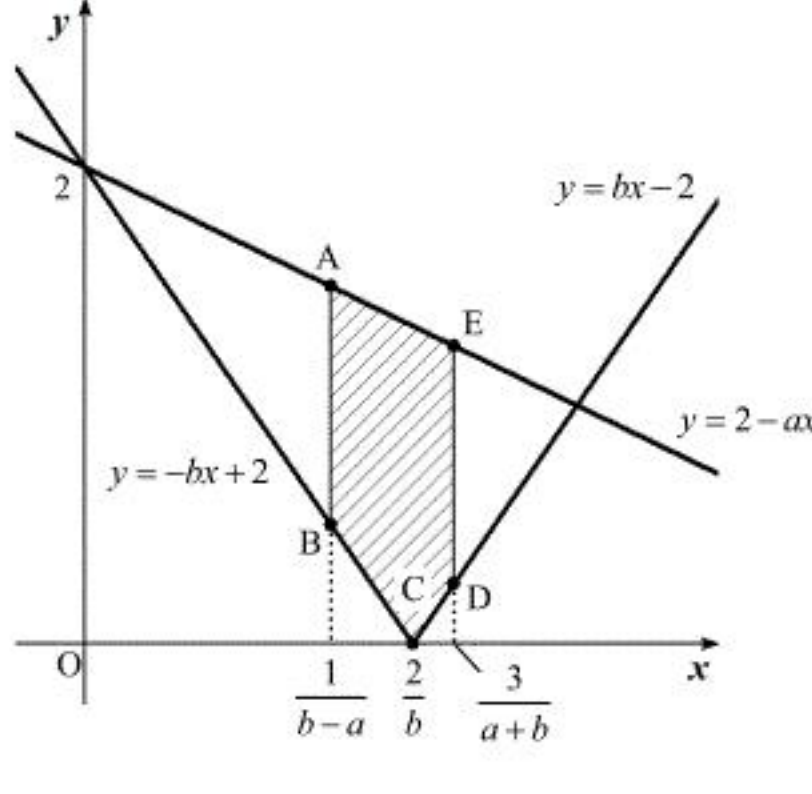
$f(x) - g(x) = h(x) \geq 1$ を満たす x を求める。 $x \leq \frac{2}{b}$ のとき、 $h(x) = (b-a)x$ であるから、求める x の範囲は、

$$\begin{aligned} (b-a)x &\geq 1 \text{ かつ } x \leq \frac{2}{b} \\ \therefore \frac{1}{b-a} &\leq x \leq \frac{2}{b} \quad (\because b-a > 0 \text{ かつ } b \geq 2a \text{ より } \frac{1}{b-a} \leq \frac{2}{b}) \end{aligned}$$

である。また、 $x \geq \frac{2}{b}$ のとき、 $h(x) = -(a+b)x + 4$ であるから、求める x の範囲は、

$$\begin{aligned} -(a+b)x + 4 &\geq 1 \text{ かつ } x \geq \frac{2}{b} \\ \therefore \frac{2}{b} &\leq x \leq \frac{3}{a+b} \quad (\because a+b > 0 \text{ かつ } b \geq 2a \text{ より } \frac{2}{b} \leq \frac{3}{a+b}) \end{aligned}$$

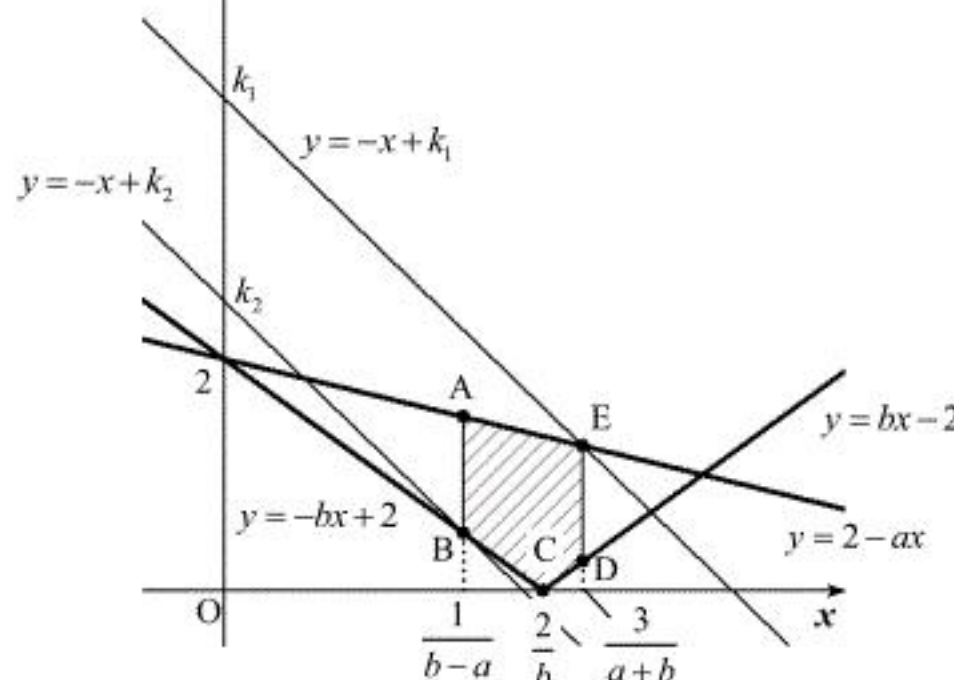
である。したがって、 $f(x) - g(x) \geq 1$ を満たす x は、 $\frac{1}{b-a} \leq x \leq \frac{3}{a+b}$ である。ここで、以下のように点 A, B, C, D, E をとり、問題文の条件を満たす領域を斜線部で示す。ただし、境界線と黒丸を含む。



$x+y=k$ (k は実数) とおくと、 $y=-x+k$ は傾きが -1 で、 y 切片が k の直線を表す式である。この直線を直線 l とする。直線 l が上記の範囲と共有点をもつように k を動かしたときの k の範囲を求めればよい。以下、 a, b の値によって場合分けを行う。

[1] $0 < a < b < 1$ のとき

以下に、点 E を通るとき k を k_1 とした直線 $y = -x + k_1$ と、点 B を通るとき k を k_2 とした直線 $y = -x + k_2$ を示す。



上図より、点 E を通るとき k は最大値 k_1 をとり、点 B を通るとき k は最小値 k_2 をとる。

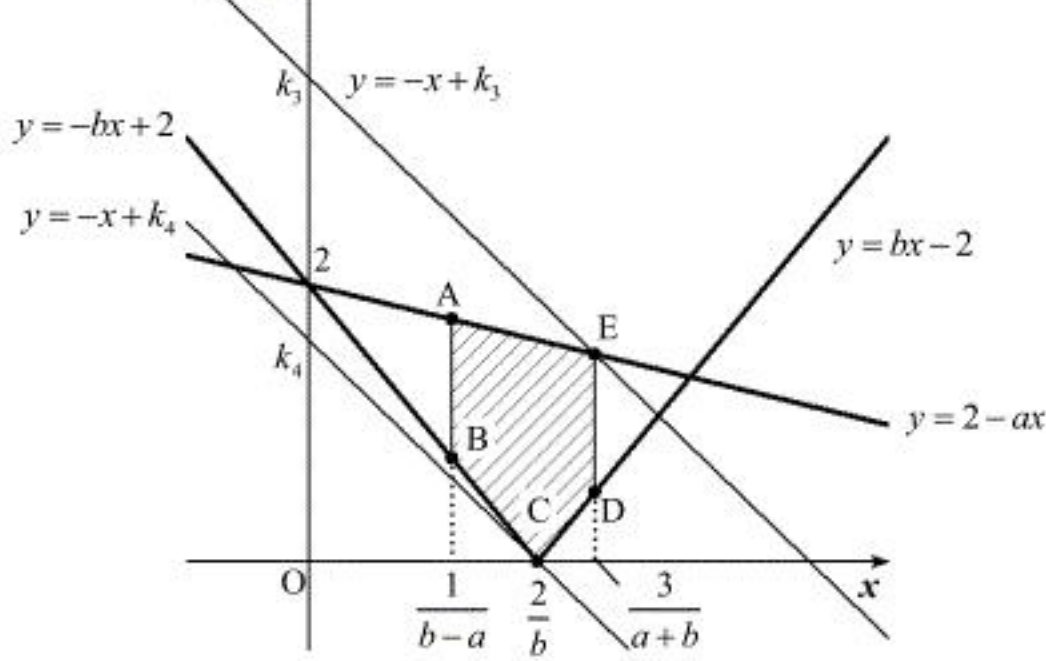
ここで、点 E の座標は $\left(\frac{3}{a+b}, \frac{-a+2b}{a+b}\right)$ であり、点 B の座標は $\left(\frac{1}{b-a}, \frac{-2a+b}{b-a}\right)$ である。したがって、

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{3}{a+b} + \frac{-a+2b}{a+b} = \frac{-a+2b+3}{a+b} \\ k_2 &= \frac{1}{b-a} + \frac{-2a+b}{b-a} = \frac{-2a+b+1}{b-a} \end{aligned}$$

となるから、 $0 < a < b < 1$ のとき、最大値 $\frac{-a+2b+3}{a+b}$ 、最小値 $\frac{-2a+b+1}{b-a}$ である。

[2] $0 < a < 1 \leq b$ のとき

以下に、点 E を通るとき k を k_3 とした直線 $y = -x + k_3$ と、点 C を通るとき k を k_4 とした直線 $y = -x + k_4$ を示す。



上図より、点 E を通るとき k は最大値 k_3 をとり、点 C を通るとき k は最小値 k_4 をとる。

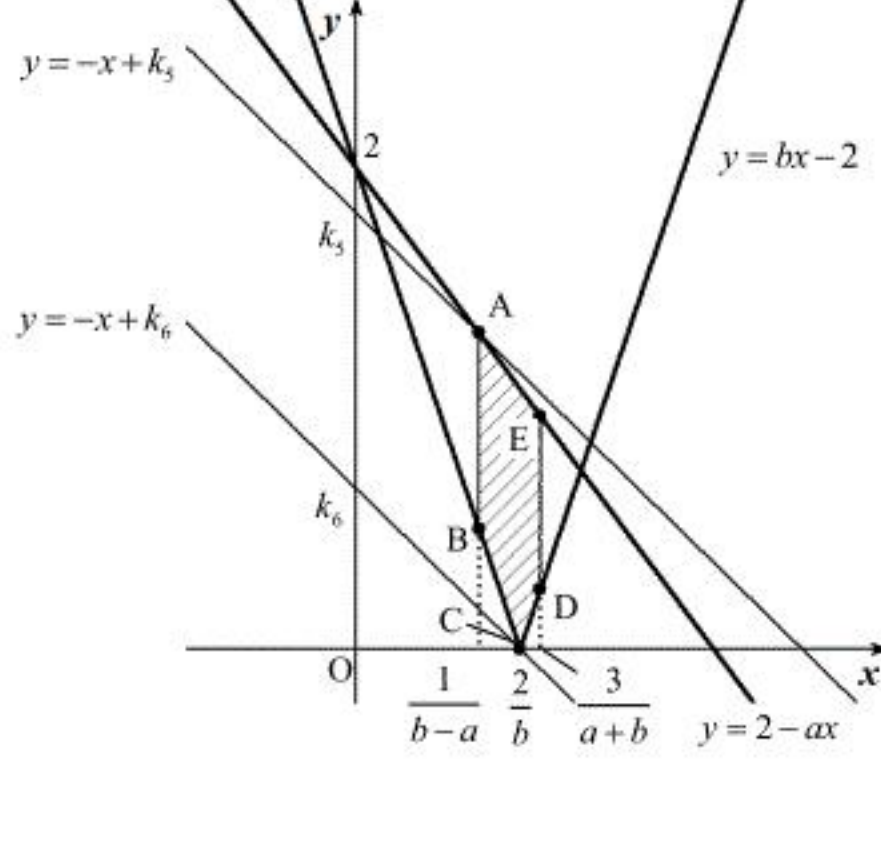
ここで、点 E の座標は $\left(\frac{3}{a+b}, \frac{-a+2b}{a+b}\right)$ であり、点 C の座標は $\left(\frac{2}{b}, 0\right)$ である。したがって、

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{3}{a+b} + \frac{-a+2b}{a+b} = \frac{-a+2b+3}{a+b} \\ k_4 &= \frac{2}{b} + 0 = \frac{2}{b} \end{aligned}$$

となるから、 $0 < a < 1 \leq b$ のとき、最大値 $\frac{-a+2b+3}{a+b}$ 、最小値 $\frac{2}{b}$ である。

[3] $1 \leq a < b$ のとき

以下に、点 A を通るとき k を k_5 とした直線 $y = -x + k_5$ と、点 C を通るとき k を k_6 とした直線 $y = -x + k_6$ を示す。



上図より、点 A を通るとき k は最大値 k_5 をとり、点 C を通るとき k は最小値 k_6 をとる。

ここで、点 A の座標は $\left(\frac{1}{b-a}, \frac{-3a+2b}{b-a}\right)$ であり、点 C の座標は $\left(\frac{2}{b}, 0\right)$ である。したがって、

$$\begin{aligned} k_5 &= \frac{1}{b-a} + \frac{-3a+2b}{b-a} = \frac{-3a+2b+1}{b-a} \\ k_6 &= \frac{2}{b} + 0 = \frac{2}{b} \end{aligned}$$

となるから、 $1 \leq a < b$ のとき、最大値 $\frac{-3a+2b+1}{b-a}$ 、最小値 $\frac{2}{b}$ である。

以上、[1], [2], [3] より $x+y$ の最大値および最小値は、

$$\begin{cases} 0 < a < b < 1 \text{ のとき, } & \text{最大値: } \frac{-a+2b+3}{a+b} & \text{最小値: } \frac{-2a+b+1}{b-a} \\ 0 < a < 1 \leq b \text{ のとき, } & \text{最大値: } \frac{-a+2b+3}{a+b} & \text{最小値: } \frac{2}{b} \\ 1 \leq a < b \text{ のとき, } & \text{最大値: } \frac{-3a+2b+1}{b-a} & \text{最小値: } \frac{2}{b} \end{cases}$$

となる。

(答) 前述