

(1)

曲線 C_a の式を $f(x) = ae^x$ とおく。まず、 t を実数として曲線 C_a の $x=t$ における接線の式を求める。 $f'(x) = ae^x$ であるから、曲線 C_a の $x=t$ における接線の式は、

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= ae^t x + ae^t(1 - t) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、①式と放物線 C の式 $y = x^2$ から y を消去することで、 x についての2次方程式、

$$\begin{aligned} x^2 &= ae^t x + ae^t(1 - t) \\ \Leftrightarrow x^2 - ae^t x + ae^t(t - 1) &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。②の判別式を D とおくと、接線①が放物線 C にも接するとき、 $D=0$ となるから、 a と t の関係式、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 e^{2t} - 4ae^t(t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow ae^t - 4(t - 1) &= 0 \quad (\because ae^t > 0) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{4(t - 1)}{e^t} \quad (\because e^t > 0) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。いま、異なる t の値に対して①は異なる直線を表すから、③の方程式の t の解の個数が C と C_a の両方に接する接線の本数に等しい。したがって、曲線 $y = \frac{4(t - 1)}{e^t}$ のグラフと

直線 $y = a$ のグラフの共有点の個数を調べればよい。 $g(t) = \frac{4(t - 1)}{e^t}$ とすると、

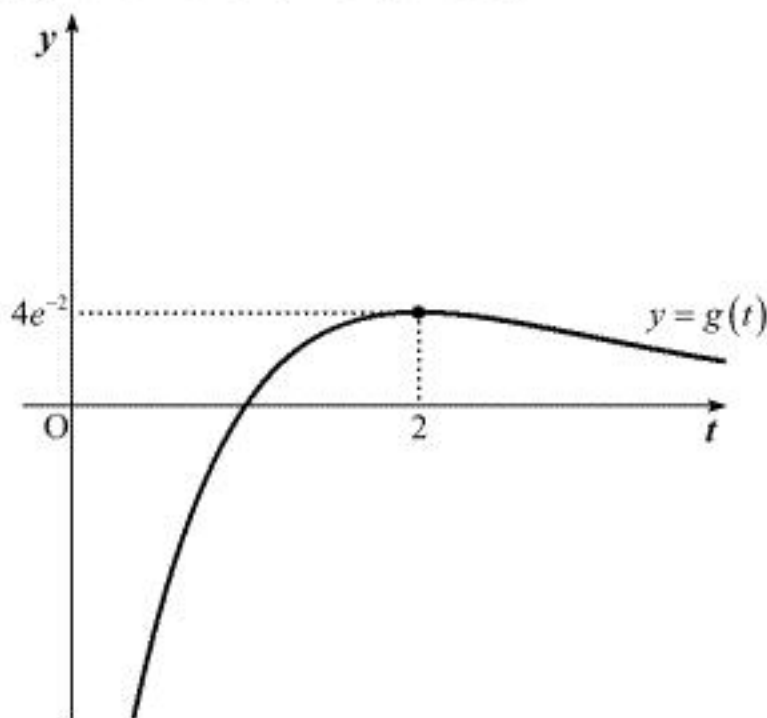
$$g'(t) = \frac{4e^t - 4e^t(t - 1)}{e^{2t}} = \frac{-4(t - 2)}{e^t}$$

である。また、 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ より $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4\left(\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t}\right) = 0$ であり、

$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} 4\left(\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t}\right) = -\infty$ であるから、増減表は以下のようになる。

t	$(-\infty)$	$\cdots$	2	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

以上より、曲線 $y = g(t)$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、 $y = g(t)$ のグラフと直線 $y = a$ ($a > 0$) のグラフの共有点は、

$$\begin{cases} a > 4e^{-2} \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ a = 4e^{-2} \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 < a < 4e^{-2} \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

であるから、求める接線の本数は、

$$\begin{cases} a > 4e^{-2} \text{ のとき, } 0 \text{ 本} \\ a = 4e^{-2} \text{ のとき, } 1 \text{ 本} \\ 0 < a < 4e^{-2} \text{ のとき, } 2 \text{ 本} \end{cases}$$

である。

(答) 前述

(2)

(1)より、放物線 C と曲線 C_a の両方に接する直線がちょうど1本であるとき $a = 4e^{-2}$ である。

いま、放物線 C の式 $y = x^2$ と曲線 C_a の式 $y = 4e^{x-2}$ から、 y を消去すると x の方程式、

$$\begin{aligned} x^2 &= 4e^{x-2} \\ \Leftrightarrow x^2 e^{-x} &= 4e^{-2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

が得られ、方程式④の解の個数が C と C_a の共有点の個数に等しい。したがって、曲線

$y = x^2 e^{-x}$ のグラフと直線 $y = 4e^{-2}$ のグラフの共有点の個数を調べればよい。いま、

$h(x) = x^2 e^{-x}$ とすると、

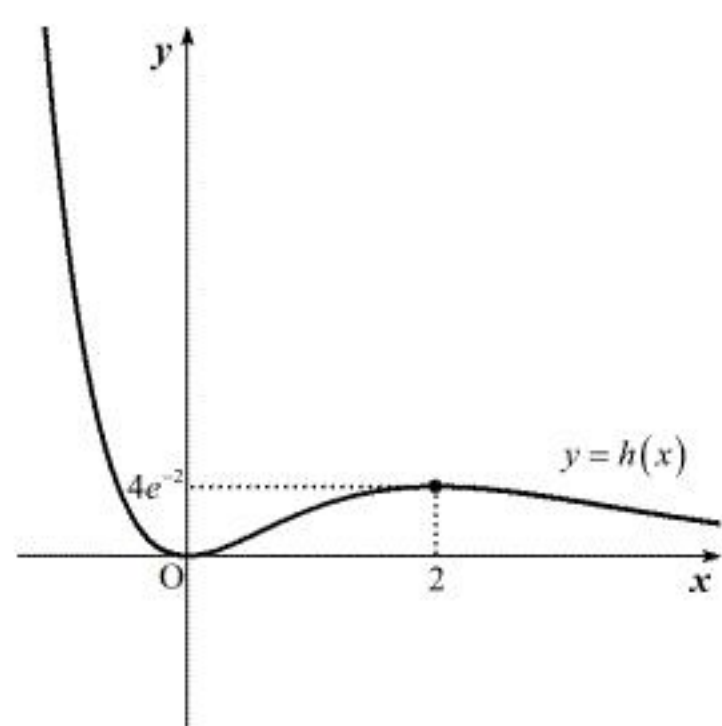
$$h'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$$

である。また、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ より $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \cdot \left(\frac{x}{e^2} - \frac{1}{e^2}\right) = 0$ であり、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ であるから、

増減表は以下のようになる。

t	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$(+\infty)$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	$(+\infty)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	(0)

以上より、曲線 $y = h(x)$ のグラフは以下のようになる。



上図より、曲線 $y = x^2 e^{-x}$ のグラフと直線 $y = 4e^{-2}$ のグラフの共有点はちょうど2個であるから、放物線 C と曲線 C_a の共有点がちょうど2個であることが示された。

(証明終)

(1)

まず、 y を x の式で表す。問題文より $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから、 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であり、 $0 \leq x \leq 1$ である。ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos \theta \geq 0$ であるから、 $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - x}$ であり、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき $\cos \theta \leq 0$ であるから、 $\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - x}$ である。したがって、 y を x の式で表すと、

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } y = x\sqrt{1-x} \ (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき, } y = -x\sqrt{1-x} \ (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

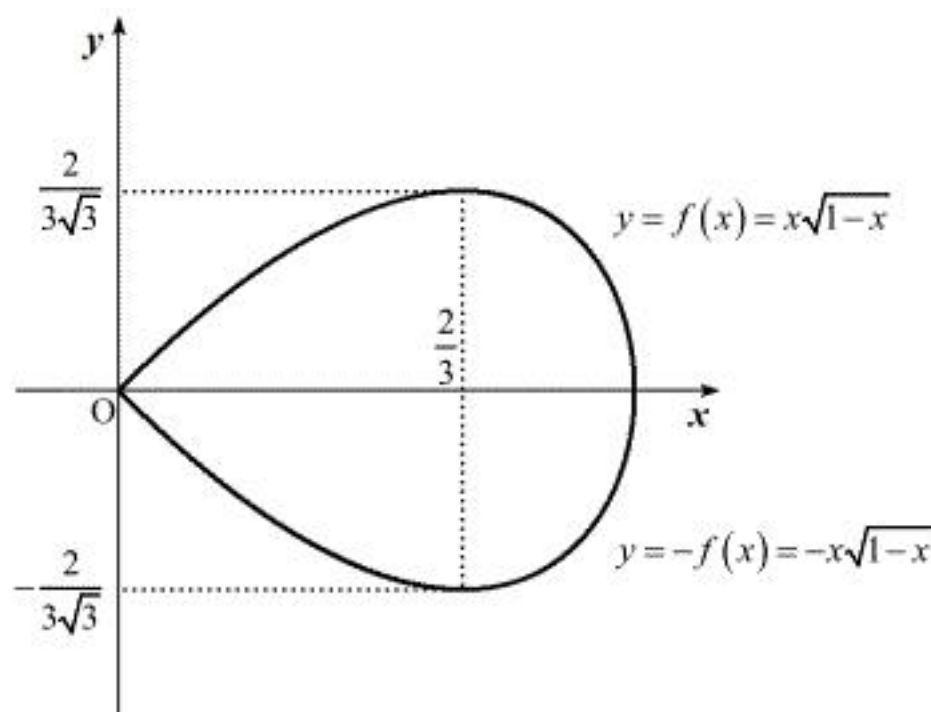
となる。いま、上の2式より x の関数 y は $y=0$ に関して対称な図形を描くことがわかるから、 $y \geq 0$ の部分、すなわち $y = x\sqrt{1-x} \ (0 \leq x \leq 1)$ のみを考えて、それを $y=0$ で折り返した図形と合わせたものを考えればよい。 $f(x) = x\sqrt{1-x}$ とすると、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} \ (x \neq 1)$$

であるから、 $f'(x) = 0$ を満たす x は $x = \frac{2}{3}$ である。増減表を以下に示す。

x	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	X
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

対称性より、曲線 C の概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

求める面積を S とする。(1)の図より曲線 C は $y=0$ に関して対称な図形であるから、 $y \geq 0$ の部分の面積を S' とすると、 $S = 2S'$ という関係が成り立つ。したがって、面積 S は(1)の図より、

$$\begin{aligned} S &= 2S' \\ &= 2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \\ &= 2 \int_0^1 x \left\{ -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right\}' dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3} x(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{4}{3} \left[-\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\frac{8}{15}$

(1)

問題文の式を,

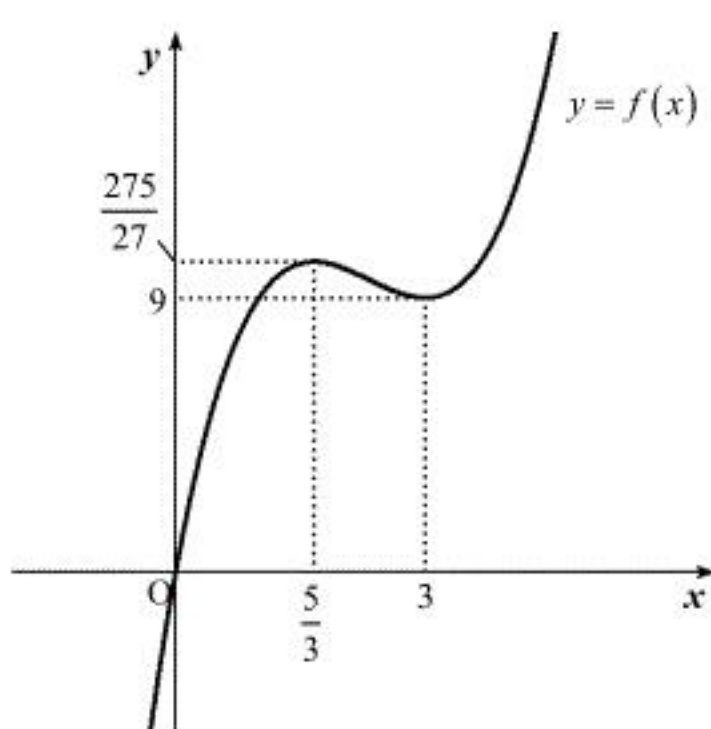
$$x^3 - 7x^2 + 15x = a$$

と変形し, 左辺を $f(x)$ とおく. 方程式 $f(x) = a$ が異なる 3 つの解をもつことは, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ が異なる 3 つの共有点をもつことと同値である. したがって, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ が異なる 3 つの共有点をもつときの a の範囲を求めればよい. $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 15 = (3x - 5)(x - 3)$$

であるから, $f'(x) = 0$ を満たす x は, $x = \frac{5}{3}, 3$ である. 増減表を以下に示す.

x	...	$\frac{5}{3}$	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{275}{27}$	$\searrow$	9	$\nearrow$

増減表より, 曲線 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる.グラフより, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ が異なる 3 つの共有点をもつときの a の範囲は, $9 < a < \frac{275}{27}$ となる. これが求める実数 a のとりうる値の範囲である.(答) $9 < a < \frac{275}{27}$

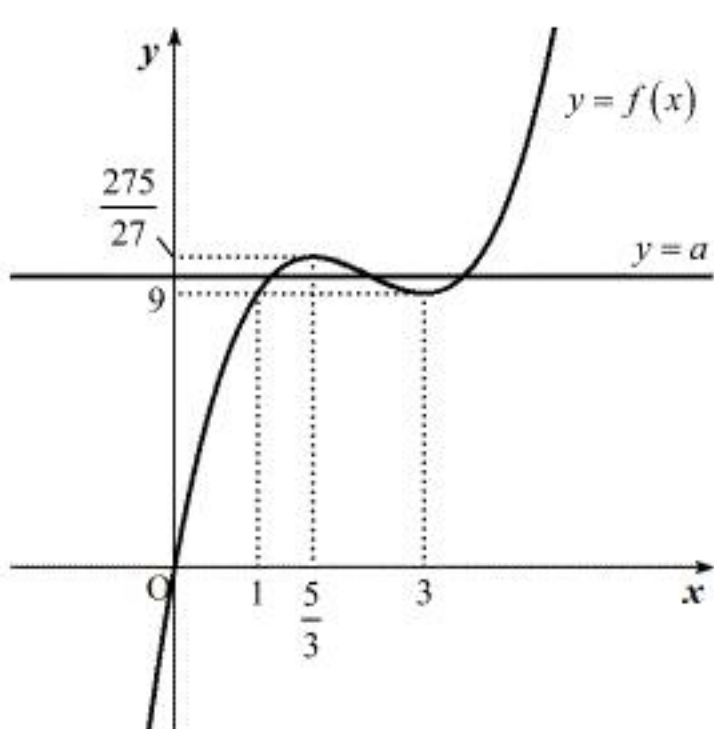
(2)

まず, $f(x) = 9$ を満たす x は,

$$x^3 - 7x^2 + 15x = 9$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 3$$

であるから, $y = f(x)$ と直線 $y = a$ を図示すると以下のようになる.曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の x 座標が小さいほうから, α, β, γ である. ここで, (1)の結果から $9 < a < \frac{275}{27}$ であるから, 上図より $1 < \alpha$ かつ $\beta < 3 < \gamma$ であることが示された.

(証明終)

(3)

3 次方程式の解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta + \gamma = 7$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 7 - \gamma$$

であるから, 問題文の式 $\alpha + \beta = \gamma$ との連立方程式を解くと $\gamma = \frac{7}{2}$ である. また, このとき a の値は, $\gamma = \frac{7}{2}$ が x の方程式 $f(x) = a$ の解の 1 つであるから代入することで,

$$a = f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^3 - 7 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 15 \cdot \frac{7}{2} = \frac{77}{8}$$

と求められる.

(答) $\gamma = \frac{7}{2}, a = \frac{77}{8}$

(4)

三角形が存在するための必要十分条件は, 2 辺の長さの和が他の 1 辺の長さよりも大きいことである. すなわち, α, β, γ に関する 3 つの不等式,

$$\begin{cases} \alpha + \beta > \gamma \\ \beta + \gamma > \alpha \\ \gamma + \alpha > \beta \end{cases}$$

が同時に成り立つときの a の範囲を求めればよい. 問題文及び(2)の結果より, $0 < \alpha < \beta < \gamma$ であるから下の 2 式は成り立つ. したがって, $\alpha + \beta > \gamma$ であればよい. 解と係数の関係より $\alpha + \beta = 7 - \gamma$ であるから,

$$\alpha + \beta > \gamma$$

$$\Leftrightarrow 7 - \gamma > \gamma$$

$$\Leftrightarrow \gamma < \frac{7}{2}$$

となり, (2) の事実も合わせると $3 < \gamma < \frac{7}{2}$ となる. (1) より $y = f(x)$ のグラフは $x \geq 3$ において単調増加であるから, 求める a の範囲は,

$$f(3) < a < f\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 9 < a < \frac{77}{8}$$

となる.

(答) $9 < a < \frac{77}{8}$