

(1)

曲線 C_a の式を $f(x) = ae^x$ とおく。まず、 t を実数として曲線 C_a の $x=t$ における接線の式を求める。 $f'(x) = ae^x$ であるから、曲線 C_a の $x=t$ における接線の式は、

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= ae^t x + ae^t(1 - t) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$ 式と放物線 C の式 $y = x^2$ から y を消去することで、 x についての2次方程式、

$$\begin{aligned} x^2 &= ae^t x + ae^t(1 - t) \\ \Leftrightarrow x^2 - ae^t x + ae^t(t - 1) &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。 $\textcircled{2}$ の判別式を D とおくと、接線 $\textcircled{1}$ が放物線 C にも接するとき、 $D = 0$ となるから、 a と t の関係式、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 e^{2t} - 4ae^t(t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow ae^t - 4(t - 1) &= 0 \quad (\because ae^t > 0) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{4(t - 1)}{e^t} \quad (\because e^t > 0) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。いま、異なる t の値に対して $\textcircled{1}$ は異なる直線を表すから、 $\textcircled{3}$ の方程式の t の解の個数が C と C_a の両方に接する接線の本数に等しい。したがって、曲線 $y = \frac{4(t - 1)}{e^t}$ のグラフと

直線 $y = a$ のグラフの共有点の個数を調べればよい。 $g(t) = \frac{4(t - 1)}{e^t}$ とすると、

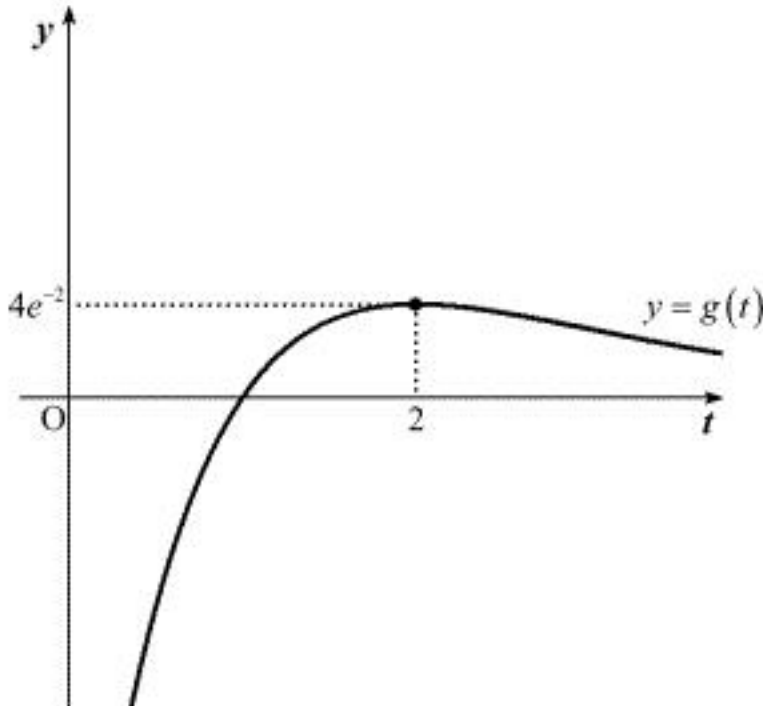
$$g'(t) = \frac{4e^t - 4e^t(t - 1)}{e^{2t}} = \frac{-4(t - 2)}{e^t}$$

である。また、 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ より $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t} \right) = 0$ であり、

$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} 4 \left(\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t} \right) = -\infty$ であるから、増減表は以下のようになる。

t	$(-\infty)$	$\cdots$	2	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

以上より、曲線 $y = g(t)$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、 $y = g(t)$ のグラフと直線 $y = a$ ($a > 0$) のグラフの共有点は、

$$\begin{cases} a > 4e^{-2} \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ a = 4e^{-2} \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 < a < 4e^{-2} \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

であるから、求める接線の本数は、

$$\begin{cases} a > 4e^{-2} \text{ のとき, } 0 \text{ 本} \\ a = 4e^{-2} \text{ のとき, } 1 \text{ 本} \\ 0 < a < 4e^{-2} \text{ のとき, } 2 \text{ 本} \end{cases}$$

である。

(答) 前述

(2)

(1)より、放物線 C と曲線 C_a の両方に接する直線がちょうど1本であるとき $a = 4e^{-2}$ である。

いま、放物線 C の式 $y = x^2$ と曲線 C_a の式 $y = 4e^{x-2}$ から、 y を消去すると x の方程式、

$$\begin{aligned} x^2 &= 4e^{x-2} \\ \Leftrightarrow x^2 e^{-x} &= 4e^{-2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

が得られ、方程式 $\textcircled{4}$ の解の個数が C と C_a の共有点の個数に等しい。したがって、曲線 $y = x^2 e^{-x}$ のグラフと直線 $y = 4e^{-2}$ のグラフの共有点の個数を調べればよい。いま、

$h(x) = x^2 e^{-x}$ とすると、

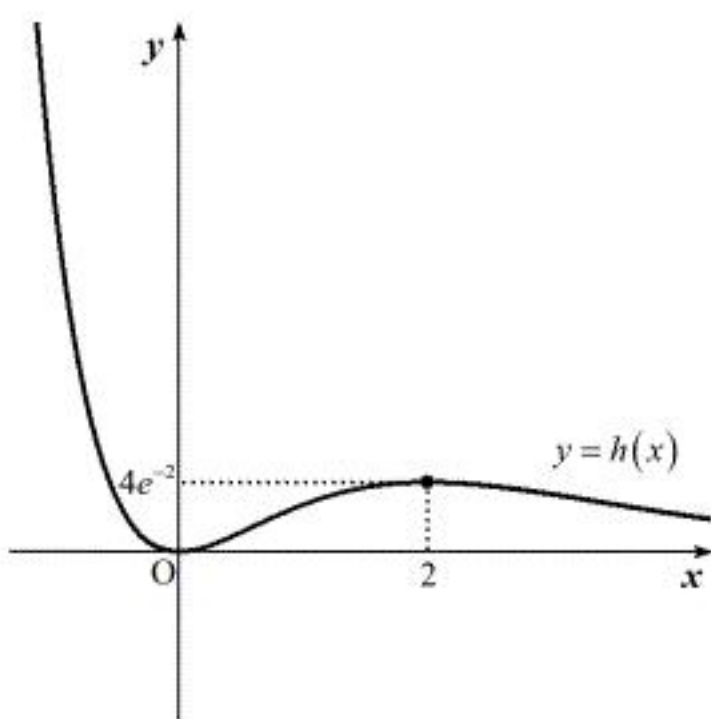
$$h'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$$

である。また、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ より $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \cdot \left(\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} \right)^2 = 0$ であり、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ であるから、

増減表は以下のようになる。

t	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$(+\infty)$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	$(+\infty)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	(0)

以上より、曲線 $y = h(x)$ のグラフは以下のようになる。



上図より、曲線 $y = x^2 e^{-x}$ のグラフと直線 $y = 4e^{-2}$ のグラフの共有点はちょうど2個であるから、放物線 C と曲線 C_a の共有点がちょうど2個であることが示された。

(証明終)

(1)

まず、 y を x の式で表す。問題文より $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから、 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であり、 $0 \leq x \leq 1$

である。ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos \theta \geq 0$ であるから、 $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - x}$ であり、

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき $\cos \theta \leq 0$ であるから、 $\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - x}$ である。したがって、 y

を x の式で表すと、

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } y = x\sqrt{1-x} \ (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき, } y = -x\sqrt{1-x} \ (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となる。いま、上の2式より x の関数 y は $y=0$ に関して対称な図形を描くことがわかるから、

$y \geq 0$ の部分、すなわち $y = x\sqrt{1-x} \ (0 \leq x \leq 1)$ のみを考えて、それを $y=0$ で折り返した図

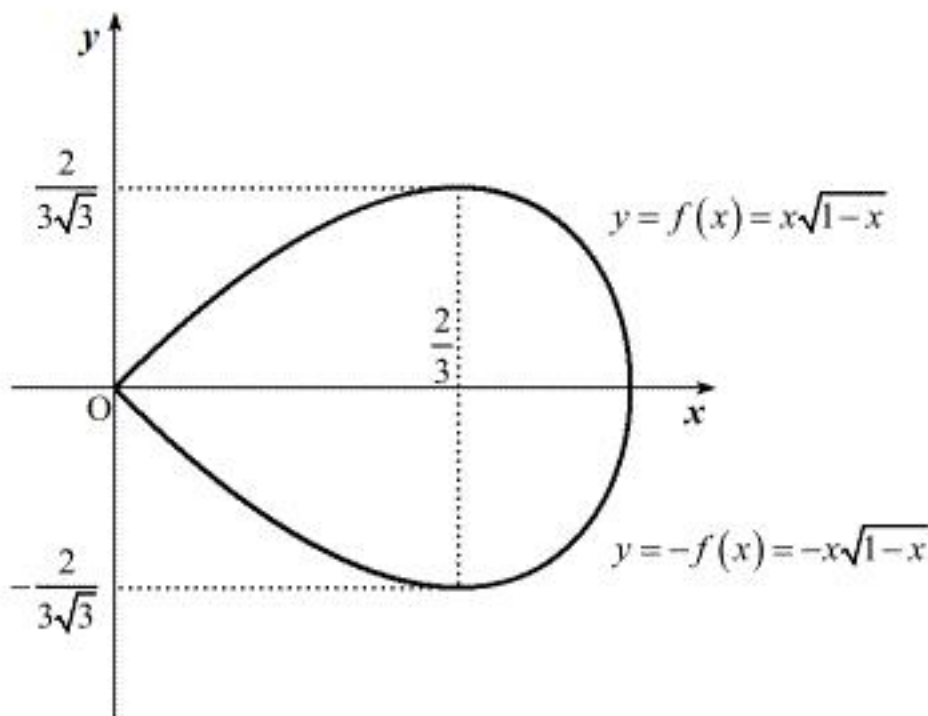
形と合わせたものを考えればよい。 $f(x) = x\sqrt{1-x}$ とすると、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} \ (x \neq 1)$$

であるから、 $f'(x) = 0$ を満たす x は $x = \frac{2}{3}$ である。増減表を以下に示す。

x	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	$\times$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

対称性より、曲線 C の概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

求める面積を S とする。(1)の図より曲線 C は $y=0$ に関して対称な図形であるから、 $y \geq 0$ の

部分の面積を S' とすると、 $S = 2S'$ という関係が成り立つ。したがって、面積 S は(1)の図より、

$$\begin{aligned} S &= 2S' \\ &= 2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \\ &= 2 \int_0^1 x \left\{ -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right\}' dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3} x(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{4}{3} \left[-\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\frac{8}{15}$