

(1)

$$\begin{aligned}
{}_n C_r + {}_n C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!r!} + \frac{(n-1)!r}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r+r)}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
&= {}_n C_r
\end{aligned}$$

であるから、示された。

(証明終)

(2)

$n=1$ のとき、

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} {}_1 C_r = \sum_{r=0}^0 {}_1 C_r = {}_1 C_0 = 1 = F_2$$

より、(★)は成り立つ。また、 $n=2$ のとき、

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{2}{2}\right]} {}_2 C_r = \sum_{r=0}^1 {}_2 C_r = {}_2 C_0 + {}_2 C_1 = 1 + 1 = 2$$

となり、 $F_3 = F_1 + F_2 = 2$ より(★)は成り立つ。以上より示された。

(証明終)

(3)

すべての自然数 n に対して(★)が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

(2)より(★)が成り立つ。

[2] $n=k, k+1$ のとき、(★)が成り立つと仮定する。

仮定より、

$$F_{k+1} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_k C_r, \quad F_{k+2} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} {}_{k+1} C_r$$

である。ここで、 k が奇数のときは、

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= F_{k+1} + F_{k+2} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k-1}{2}} {}_k C_r + \sum_{r=0}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1} C_r \\
&= \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1} C_{r-1} + \left({}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1} C_r \right) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} ({}_{k+1} C_{r-1} + {}_{k+1} C_r) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2} C_r \quad (\because (1)) \\
&= {}_{k+2} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2} C_r \quad (\because {}_{k+1} C_0 = {}_{k+2} C_0 = 1) \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2} C_r \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} {}_{k+2} C_r
\end{aligned}$$

となる。また、 k が偶数のときは、

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= F_{k+1} + F_{k+2} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} {}_k C_r + \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} {}_{k+1} C_r \\
&= \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}+1} {}_{k+1} C_{r-1} + \left({}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+1} C_r \right) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} ({}_{k+1} C_{r-1} + {}_{k+1} C_r) + \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}} \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+2} C_r + \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}} \quad (\because (1)) \\
&= {}_{k+2} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+2} C_r + \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}} \left(\because {}_{k+1} C_0 = {}_{k+2} C_0 = 1, \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}} = \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}+1} = 1 \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}+1} {}_{k+2} C_r \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} {}_{k+2} C_r
\end{aligned}$$

となる。よって、 $n=k+2$ においても、(★)が成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n に対して(★)が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

A, B, C, D のうち、到達できる点の選び方は、

$${}_4C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

であり、対称性よりその点が A のときのみ考えればよい。このとき、OA は青であり、OB, OC, OD は赤である必要がある。また、AB, AD は赤であり、BC, CD は青、赤どちらでもよい。よって、A に到達できる塗り方は、

$$2^2 = 4 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 4}{2^8} = \frac{1}{16}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{16}$$

(2)

A, B, C, D のうち、到達できる点の組の選び方は、

$${}_4C_3 = 4 \text{ (通り)}$$

であり、対称性よりそれらの点が A, B, C のときのみ考えればよい。点 D に到達しないから、OD, AD, CD は赤である。その他の線分の塗り方の場合の数を AB, BC の色で場合分けする。

[1] AB, BC がともに赤のとき

OA, OB, OC はすべて青である必要があるから、場合の数は 1 通りである。

[2] AB, BC がともに青のとき

OA, OB, OC のうち少なくとも 1 つが青であればよいから、余事象を考えて、場合の数は

$$2^3 - 1 = 7 \text{ (通り)}$$

である。

[3] AB が青で BC が赤のとき

OC は青である必要があり、OA, OB は少なくとも 1 つが青であればよい。よって、場合の数は

$$2^2 - 1 = 3 \text{ (通り)}$$

である。

[4] AB が赤で BC が青のとき

[3] と同様に考えて 3 通りである。

以上、[1]~[4] より、A, B, C に到達できる塗り方は、

$$1 + 7 + 3 \cdot 2 = 14 \text{ (通り)}$$

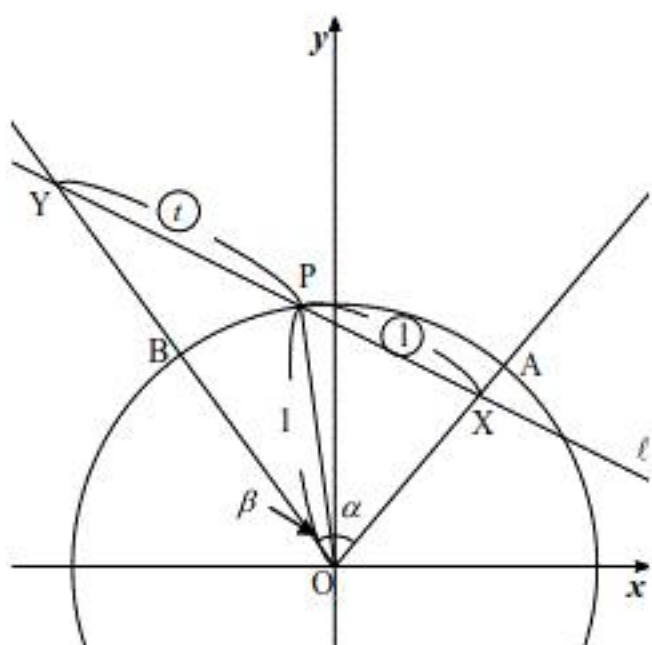
であるから、求める確率は

$$\frac{14 \cdot 4}{2^8} = \frac{7}{32}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{7}{32}$$

(1)



$\angle XOP = \alpha$, $\angle YOP = \beta$ とおくと, $0 < \alpha < \theta$ であり, $\alpha + \beta = \theta$ が成り立つ. α, β, t を与えたとき, OX の長さがただ1つに決まれば, X, P を通る直線 ℓ をただ1つとることができる.

$OX = x, OY = y$ ($x > 0, y > 0$) とおくと,

$$\triangle OXP : \triangle OYP = XP : YP$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 \cdot \sin \alpha : \frac{1}{2} \cdot y \cdot 1 \cdot \sin \beta = 1 : t$$

$$\Leftrightarrow x \sin \alpha : y \sin \beta = 1 : t$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{tx \sin \alpha}{\sin \beta} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ. また,

$$\triangle OXY = \triangle OXP + \triangle OYP$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} xy \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} x \sin \alpha + \frac{1}{2} y \sin \beta \quad \dots \textcircled{2}$$

である. ①を②に代入すると

$$x \cdot \frac{tx \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta) = x \sin \alpha + tx \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{t \sin \alpha \sin \theta}{\sin \beta} x^2 = (t+1)x \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{t \sin \theta}{\sin \beta} x = t+1 \quad (\because x > 0, \sin \alpha \neq 0)$$

$$\therefore x = \frac{(t+1) \sin \beta}{t \sin \theta}$$

と表されるから, OX の長さはただ1つに決まり, 題意は示された.

(証明終)

(2)

①より

$$y = \frac{t \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{(t+1) \sin \beta}{t \sin \theta} = \frac{(t+1) \sin \alpha}{\sin \theta}$$

であるから, $\triangle OXY$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} xy \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(t+1) \sin \beta}{t \sin \theta} \cdot \frac{(t+1) \sin \alpha}{\sin \theta} \cdot \sin \theta \\ &= \frac{(t+1)^2}{2t} \cdot \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin \theta} \\ &= \frac{(t+1)^2}{2t} \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha) \sin \alpha}{\sin \theta} \end{aligned}$$

と表せる. また,

$$\sin(\theta - \alpha) \sin \alpha = \frac{1}{2} \{ \cos(\theta - 2\alpha) - \cos \theta \}$$

より,

$$S = \frac{(t+1)^2}{4t} \cdot \frac{\cos(\theta - 2\alpha) - \cos \theta}{\sin \theta}$$

となるから, P を動かすときに S が最大となるのは

$$\cos(\theta - 2\alpha) = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

となるときである. ここで, $0 < \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$$-\frac{\pi}{2} < -\theta < \theta - 2\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$$

であるから,

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \theta - 2\alpha = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{\theta}{2}$$

のとき, すなわち P が弧 AB の中点のとき, S は最大となることがわかる.

$$(\text{答}) \quad S = \frac{(t+1)^2}{2t} \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha) \sin \alpha}{\sin \theta}, \quad \alpha = \frac{\theta}{2}$$