

(1)

$$\begin{aligned}
{}_n C_r + {}_n C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!r!} + \frac{(n-1)!r}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r+r)}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
&= {}_n C_r
\end{aligned}$$

であるから、示された。

(証明終)

(2)

$n=1$ のとき、

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} {}_1 C_r = \sum_{r=0}^0 {}_1 C_r = {}_1 C_0 = 1 = F_2$$

より、(★)は成り立つ。また、 $n=2$ のとき、

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{2}{2}\right]} {}_2 C_r = \sum_{r=0}^1 {}_2 C_r = {}_2 C_0 + {}_2 C_1 = 1 + 1 = 2$$

となり、 $F_3 = F_1 + F_2 = 2$ より(★)は成り立つ。以上より示された。

(証明終)

(3)

すべての自然数 n に対して(★)が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

(2)より(★)が成り立つ。

[2] $n=k, k+1$ のとき、(★)が成り立つと仮定する。

仮定より、

$$F_{k+1} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_k C_r, F_{k+2} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} {}_{k+1} C_r$$

である。ここで、 k が奇数のときは、

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= F_{k+1} + F_{k+2} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k-1}{2}} {}_k C_r + \sum_{r=0}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1} C_r \\
&= \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1} C_{r-1} + \left({}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1} C_r \right) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} ({}_{k+1} C_{r-1} + {}_{k+1} C_r) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2} C_r \quad (\because (1)) \\
&= {}_{k+2} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2} C_r \quad (\because {}_{k+1} C_0 = {}_{k+2} C_0 = 1) \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2} C_r \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} {}_{k+2} C_r
\end{aligned}$$

となる。また、 k が偶数のときは、

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= F_{k+1} + F_{k+2} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} {}_k C_r + \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} {}_{k+1} C_r \\
&= \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}+1} {}_{k+1} C_{r-1} + \left({}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+1} C_r \right) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} ({}_{k+1} C_{r-1} + {}_{k+1} C_r) + \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}} \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+2} C_r + \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}} \quad (\because (1)) \\
&= {}_{k+2} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+2} C_r + \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}} \left(\because {}_{k+1} C_0 = {}_{k+2} C_0 = 1, \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}} = \frac{k}{2} C_{\frac{k}{2}+1} = 1 \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}+1} {}_{k+2} C_r \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} {}_{k+2} C_r
\end{aligned}$$

となる。よって、 $n=k+2$ においても、(★)が成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n に対して(★)が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

A, B, C, D のうち、到達できる点の選び方は、

$${}_4C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

であり、対称性よりその点が A のときのみ考えればよい。このとき、OA は青であり、OB, OC, OD は赤である必要がある。また、AB, AD は赤であり、BC, CD は青、赤どちらでもよい。よって、A に到達できる塗り方は、

$$2^2 = 4 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 4}{2^8} = \frac{1}{16}$$

である。

(答) $\frac{1}{16}$

(2)

A, B, C, D のうち、到達できる点の組の選び方は、

$${}_4C_3 = 4 \text{ (通り)}$$

であり、対称性よりそれらの点が A, B, C のときのみ考えればよい。点 D に到達しないので、OD, AD, CD は赤である。その他の線分の塗り方の場合の数を AB, BC の色で場合分けする。

[1] AB, BC がともに赤のとき

OA, OB, OC はすべて青である必要があるから、場合の数は 1 通りである。

[2] AB, BC がともに青のとき

OA, OB, OC のうち少なくとも 1 つが青であればよいから、余事象を考えて、場合の数は

$$2^3 - 1 = 7 \text{ (通り)}$$

である。

[3] AB が青で BC が赤のとき

OC は青である必要があり、OA, OB は少なくとも 1 つが青であればよい。よって、場合の数は

$$2^2 - 1 = 3 \text{ (通り)}$$

である。

[4] AB が赤で BC が青のとき

[3] と同様に考えて 3 通りである。

以上, [1]~[4] より、A, B, C に到達できる塗り方は、

$$1 + 7 + 3 \cdot 2 = 14 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{14 \cdot 4}{2^8} = \frac{7}{32}$$

である。

(答) $\frac{7}{32}$

(3)

(2) より、青の線分のみを通り A, B, C に到達できる組み合わせは 14 通りある。このとき、OA, AD, CD は赤に塗られているから、赤の線分のみを通り A, C, D に到達することができる。したがって、14 通りの組み合わせのうち、赤の線分のみを通って B に到達できない条件を考えればよい。このとき OB, AB, BC は青であり、また、OA, OC の塗り方に関わらず、条件を満たすから、求める確率は

$$\frac{2 \cdot 2}{14} = \frac{2}{7}$$

である。

(答) $\frac{2}{7}$

(1)

 $x > 0$ より,

$$f(x) = x^{x^2} = e^{\left(\log x^{x^2}\right)} = e^{\left(x^2 \log x\right)}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \log x\right)' e^{\left(x^2 \log x\right)} \\ &= (2x \log x + x) x^{\left(x^2\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x \log x + x)' e^{\left(x^2 \log x\right)} + (2x \log x + x) \left\{e^{\left(x^2 \log x\right)}\right\}' \\ &= (2 \log x + 2 + 1) e^{\left(x^2 \log x\right)} + (2x \log x + x)^2 e^{\left(x^2 \log x\right)} \\ &= \left\{(2x \log x + x)^2 + 2 \log x + 3\right\} x^{\left(x^2\right)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = (2x \log x + x) x^{\left(x^2\right)}, \quad f''(x) = \left\{(2x \log x + x)^2 + 2 \log x + 3\right\} x^{\left(x^2\right)}$$

(2)

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \log x + x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \log x + 1 = 0 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore x = e^{-\frac{1}{2}}$$

であり, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$e^{-\frac{1}{2}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\nearrow$

また,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x = \lim_{x \rightarrow +0} x(x \log x) = 0$$

となるから,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\left(x^2 \log x\right)} = e^0 = 1$$

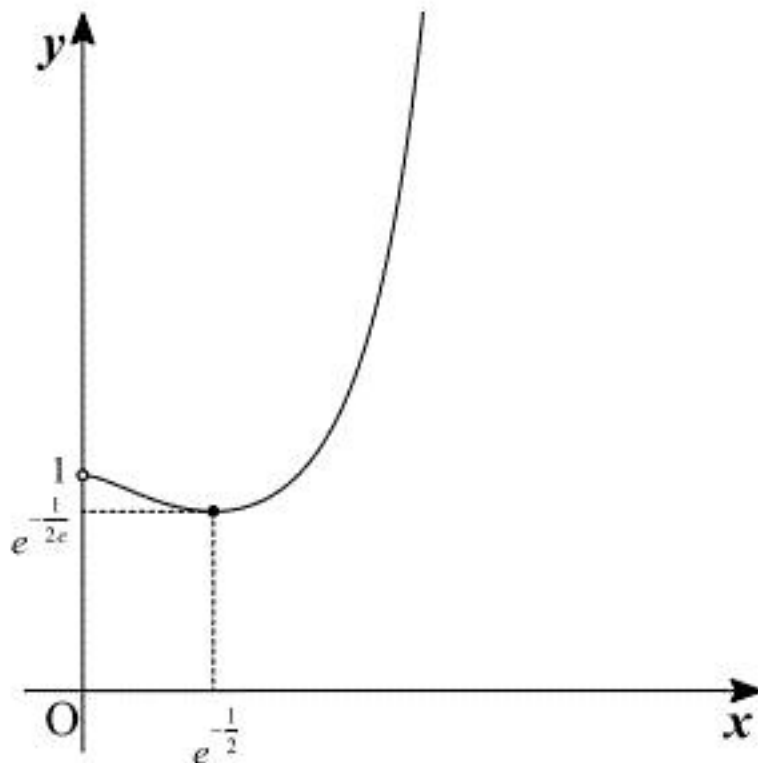
$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (2x \log x + x) e^{\left(x^2 \log x\right)} = 0 \cdot e^0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(x^2 \log x\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \log x + x) x^{\left(x^2\right)} = +\infty$$

である。また

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{\left\{e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}} = e^{-\frac{1}{2e}}$$

であるから, 曲線 $y = f(x)$ の概形は以下のようになる。

(答) 前図

(3)

 $f(x) = k$ が異なる 2 つの実数解を持つとき, $y = f(x)$ と $y = k$ が異なる 2 つの共有点を持つ。したがって, 上図より求める k の値の範囲は, $e^{-\frac{1}{2e}} < k < 1$ である。(答) $e^{-\frac{1}{2e}} < k < 1$