

(1)

$$\begin{aligned}
{}_n C_r + {}_n C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!r!} + \frac{(n-1)!r}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r+r)}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
&= {}_n C_r
\end{aligned}$$

であるから、示された。

(証明終)

(2)

$n=1$ のとき、

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} {}_1 C_r = \sum_{r=0}^0 {}_1 C_r = {}_1 C_0 = 1 = F_2$$

より、(★)は成り立つ。また、 $n=2$ のとき、

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{2}{2}\right]} {}_2 C_r = \sum_{r=0}^1 {}_2 C_r = {}_2 C_0 + {}_2 C_1 = 1 + 1 = 2$$

となり、 $F_3 = F_1 + F_2 = 2$ より (★)は成り立つ。以上より示された。

(証明終)

(3)

すべての自然数 n に対して (★)が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

(2)より (★)が成り立つ。

[2] $n=k, k+1$ のとき、(★)が成り立つと仮定する。

仮定より、

$$F_{k+1} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_{k-r} C_r, F_{k+2} = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} {}_{k+1-r} C_r$$

である。ここで、 k が奇数のときは、

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= F_{k+1} + F_{k+2} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k-1}{2}} {}_{k-r} C_r + \sum_{r=0}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1-r} C_r \\
&= \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1-r} C_{r-1} + \left({}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1-r} C_r \right) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} ({}_{k+1-r} C_{r-1} + {}_{k+1-r} C_r) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2-r} C_r \quad (\because (1)) \\
&= {}_{k+2} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2-r} C_r \quad (\because {}_{k+1} C_0 = {}_{k+2} C_0 = 1) \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+2-r} C_r \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} {}_{k+2-r} C_r
\end{aligned}$$

となる。また、 k が偶数のときは、

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= F_{k+1} + F_{k+2} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} {}_{k-r} C_r + \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} {}_{k+1-r} C_r \\
&= \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} {}_{k+1-r} C_{r-1} + \left({}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+1-r} C_r \right) \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} ({}_{k+1-r} C_{r-1} + {}_{k+1-r} C_r) + {}_{\frac{k}{2}} C_{\frac{k}{2}} \\
&= {}_{k+1} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+2-r} C_r + {}_{\frac{k}{2}} C_{\frac{k}{2}} \quad (\because (1)) \\
&= {}_{k+2} C_0 + \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} {}_{k+2-r} C_r + {}_{\frac{k}{2}+1} C_{\frac{k}{2}+1} \left(\because {}_{k+1} C_0 = {}_{k+2} C_0 = 1, {}_{\frac{k}{2}} C_{\frac{k}{2}} = {}_{\frac{k}{2}+1} C_{\frac{k}{2}+1} = 1 \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{k}{2}+1} {}_{k+2-r} C_r \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} {}_{k+2-r} C_r
\end{aligned}$$

となる。よって、 $n=k+2$ においても、(★)が成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n に対して (★)が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

A, B, C, D のうち、到達できる点の選び方は、

$${}_4C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

であり、対称性よりその点が A のときのみ考えればよい。このとき、OA は青であり、OB, OC, OD は赤である必要がある。また、AB, AD は赤であり、BC, CD は青、赤どちらでもよい。よって、A に到達できる塗り方は、

$$2^2 = 4 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 4}{2^8} = \frac{1}{16}$$

である。

(答) $\frac{1}{16}$

(2)

A, B, C, D のうち、到達できる点の組の選び方は、

$${}_4C_3 = 4 \text{ (通り)}$$

であり、対称性よりそれらの点が A, B, C のときのみ考えればよい。点 D に到達しないので、OD, AD, CD は赤である。その他の線分の塗り方の場合の数を AB, BC の色で場合分けする。

[1] AB, BC がともに赤のとき

OA, OB, OC はすべて青である必要があるから、場合の数は 1 通りである。

[2] AB, BC がともに青のとき

OA, OB, OC のうち少なくとも 1 つが青であればよいから、余事象を考えて、場合の数は

$$2^3 - 1 = 7 \text{ (通り)}$$

である。

[3] AB が青で BC が赤のとき

OC は青である必要があり、OA, OB は少なくとも 1 つが青であればよい。よって、場合の数は

$$2^2 - 1 = 3 \text{ (通り)}$$

である。

[4] AB が赤で BC が青のとき

[3] と同様に考えて 3 通りである。

以上, [1]~[4] より、A, B, C に到達できる塗り方は、

$$1 + 7 + 3 \cdot 2 = 14 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{14 \cdot 4}{2^8} = \frac{7}{32}$$

である。

(答) $\frac{7}{32}$

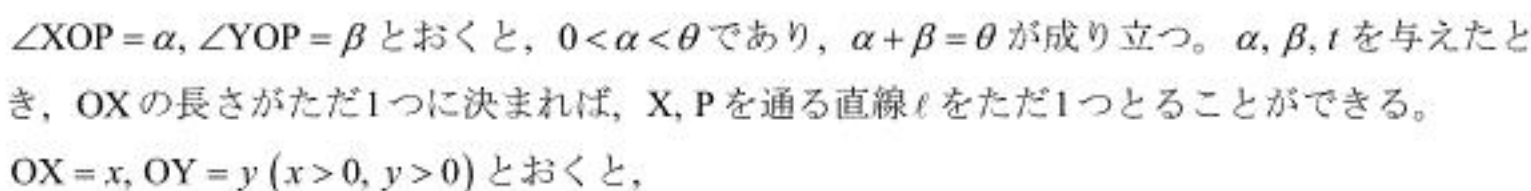
(3)

(2) より、青の線分のみを通り A, B, C に到達できる組み合わせは 14 通りある。このとき、OA, AD, CD は赤に塗られているから、赤の線分のみを通り A, C, D に到達することができる。したがって、14 通りの組み合わせのうち、赤の線分のみを通って B に到達できない条件を考えればよい。このとき OB, AB, BC は青であり、また、OA, OC の塗り方に関わらず、条件を満たすから、求める確率は

$$\frac{2 \cdot 2}{14} = \frac{2}{7}$$

である。

(答) $\frac{2}{7}$



が成り立つ。また,

である。①を②に代入すると

と表されるから、OXの長さはただ1つに決まり、顯意は示された。

(証明終)

(2)

①より

であるから、 $\triangle OXY$ の面積 S は

と表せる。また、

より,

となるので、 P を動かすときに S が最大となるのは

となるときである。ここで、 $0 < \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

であるから、

のとき、すなわち P が弧 AB の中点のとき、 S は最大となることがわかる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{(t+1)^2}{2t} \cdot \frac{\sin(\theta-\alpha)\sin\alpha}{\sin\theta}, \quad \alpha = \frac{\theta}{2}$$