

(1)

すべての自然数 n において、 $a_n = (1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n$ は整数であることを示す。まず、それぞれの複素数を極形式に変形すると、

$$1 + \sqrt{3}i = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$1 - \sqrt{3}i = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

となるから、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} a_n &= (1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n \\ &= 2^n \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n + 2^n \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}^n \\ &= 2^n \left\{ \cos \left(\frac{n}{3} \pi \right) + \cos \left(-\frac{n}{3} \pi \right) \right\} + 2^n \cdot i \left\{ \sin \left(\frac{n}{3} \pi \right) + \sin \left(-\frac{n}{3} \pi \right) \right\} \\ &= 2^{n+1} \cdot \cos \frac{n}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。したがって $n \geq 1$ において

$$a_{n+6} = 2^6 \cdot a_n$$

であることがわかる。よって a_n ($n=1, 2, \dots, 6$) の値は以下の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6
$\cos \frac{n}{3} \pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
a_n	2	-4	-16	-16	32	128

したがって a_n ($n=1, 2, \dots, 6$) は整数である。また、すべての自然数 k において、 $a_{k+6} = 2^6 \cdot a_k$ が成り立つことから、 a_k が整数であるなら a_{k+6} も整数である。したがって帰納的にすべての自然数 n において a_n が自然数であることは示された。

(証明終)

(2)

(1)より、 a_{k+6} の符号は a_k の符号と一致する。 a_n ($n=1, 2, \dots, 6$) の符号は以下のようにまとめられる。

n	1	2	3	4	5	6
a_n	正	負	負	負	正	正

したがって、 a_n の符号が負になる自然数 n の条件は

n を 6 で割った余りが 2, 3, 4 のいずれかである

ことであるとわかる。

(答) n を 6 で割った余りが 2, 3, 4 のいずれかであるとき

(3)

(1)より、 $|a_n|$ ($n=1, 2, \dots, 6$) の値は以下の表のようにまとめられる。

n	1	2	3	4	5	6
$ a_n $	2^1	2^2	$2 \cdot 2^3$	2^4	2^5	$2 \cdot 2^6$

また、(1)より、 $|a_{k+6}| = 2^6 |a_k|$ であることから $|a_k|$ が 2 の累乗であるとき $|a_{k+6}|$ も 2 の累乗である。したがって帰納的に、すべての自然数 n において $|a_n|$ が 2 の累乗であることが示された。

(証明終)

また、 a_n の値は

$$|a_n| = \begin{cases} 2^{n+1} & (n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 0, 3 \text{ のいずれかの時}) \\ 2^n & (n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 1, 2, 4, 5 \text{ のいずれかの時}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答})(\text{指数}) = \begin{cases} n+1 & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数の時}) \\ n & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数でない時}) \end{cases}$$

(1)

与えられた式に $k=0$ を代入することで、 $I_0(t)$ は

$$I_0(t) = \int_0^t e^{-ax} dx = \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

となる。ここで、 $a>0$ であるから、 $t \rightarrow \infty$ のとき e^{-at} は収束し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} = 0$ であるから、 $I_0(t)$

も収束し、求める極限值は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_0(t) = \frac{1}{a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_0(t) = \frac{1}{a}$$

(2)

部分積分を利用して、

$$\begin{aligned} I_{k+1}(t) &= \int_0^t x^{k+1} e^{-ax} dx \\ &= -\frac{1}{a} \left[x^{k+1} e^{-ax} \right]_0^t + \frac{k+1}{a} \int_0^t x^k e^{-ax} dx \\ &= \frac{k+1}{a} I_k(t) - \frac{1}{a} t^{k+1} e^{-at} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_{k+1}(t) = \frac{k+1}{a} I_k(t) - \frac{1}{a} t^{k+1} e^{-at}$$

(3)

$I_k(t)$ が収束し、その極限值が $\frac{k!}{a^{k+1}}$ となることを、数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $k=0$ のとき

(1)より $I_0(t)$ は収束し、その極限值は $\frac{1}{a} \left(= \frac{0!}{a^{0+1}} \right)$ となる。

[2] $k=j$ のとき

$t \rightarrow \infty$ のとき、 $I_j(t)$ は収束し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_j(t) = \frac{j!}{a^{j+1}}$ となると仮定する。 $k=j+1$ のとき(2)より

$$I_{j+1}(t) = \frac{j+1}{a} I_j(t) - \frac{1}{a} t^{j+1} e^{-at}$$

となる。 $I_j(t)$ は収束し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_j(t) = \frac{j!}{a^{j+1}}$ となることと、 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{j+1} e^{-at} = 0$ であることから、

$I_{j+1}(t)$ は収束し、その極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I_{j+1}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{j+1}{a} I_j(t) - \frac{1}{a} t^{j+1} e^{-at} \right\} \\ &= \frac{j+1}{a} \cdot \frac{j!}{a^{j+1}} - \frac{1}{a} \cdot 0 \\ &= \frac{(j+1)!}{a^{(j+1)+1}} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より数学的帰納法によって $I_k(t)$ は収束し、その極限值は $\frac{k!}{a^{k+1}}$ となることが示された。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_k(t) = \frac{k!}{a^{k+1}}$$

(1)

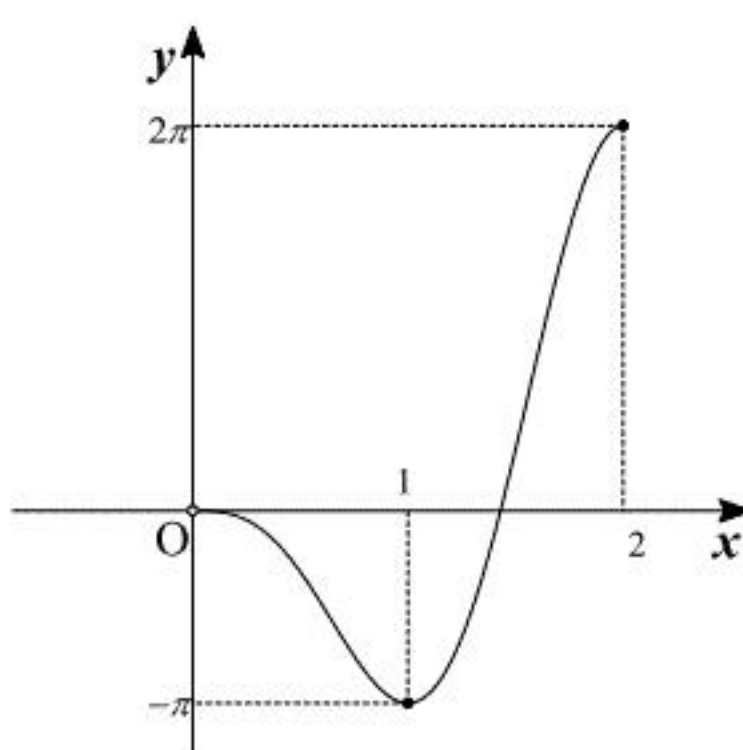
$f(x) = \pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \pi \cos(\pi x) - \pi^2 x \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x) \\ &= -\pi^2 x \sin(\pi x) \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < x \leq 2$ において、 $x=1, 2$ のときに $f'(x)=0$ となる。これより、増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	(0)	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

よって、グラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)の増減表より、 $0 < x \leq 1$ においては、

$$f(x) < f(0) = 0$$

となるため $f(x)=0$ となる x は存在しない。また、 $1 < x < 2$ において、 $f(x)$ は連続関数であり、 $f(1)=-\pi < 0$ 、 $f(2)=2\pi > 0$ であるから中間値の定理より、この区間に $f(x)=0$ となる x が少なくとも一つ存在する。 $1 < x < 2$ において $f'(x) > 0$ であることから、 $1 < x_1 < x_2 < 2$ を満たす実数 x_1, x_2 において、 $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ。さらに、

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}-4\pi}{6} < 0 \quad (\because \pi > 3)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi \cdot 0 - (-1) = 1 > 0$$

であるから、 $f(x)=0$ となる解は $\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$ の範囲にただ一つ存在する。 $f(2) \neq 0$ であること

を合わせると、 $0 < x \leq 2$ において $f(x)=0$ の解はただ一つ存在し、その解は $\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$ の範囲に存在することが示された。

(証明終)

(3)

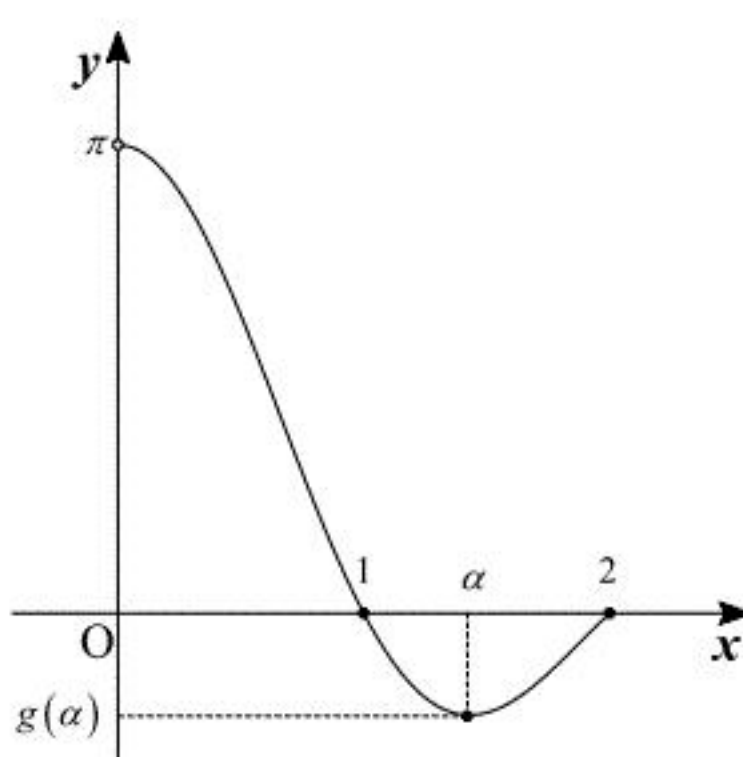
$g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$ であるから、

$$g'(x) = \frac{\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2}$$

となる。(2)より、 $g'(x)=0$ の解は $\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$ の範囲にただ一つ存在する。この解を $x=\alpha$ とすると、増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	0

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \pi$ より、グラフの概形は以下のようになる。ただし、白丸は含まない。



(2)より、 $\frac{4}{3} < \alpha < \frac{3}{2}$ であるので

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{3}{4}$$

である。また、 $-1 \leq \sin(\pi \alpha) \leq 1$ であることから $-\frac{3}{4} < g(\alpha)$ となり、グラフより $g(\alpha) < 0$ であることも合わせると $-1 < g(\alpha) < 0$ であることが分かる。よって、共有点の個数は、

$$\begin{cases} n=0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ n=1, 2, 3 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ n \neq 0, 1, 2, 3 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

$$(答) \quad \begin{cases} n=0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ n=1, 2, 3 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ n \neq 0, 1, 2, 3 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$