

数 学 共 通

(数学科, 物理学科用)

注 意 事 項

試験開始の合図があるまでは, この冊子を開いてはいけない.

1. この冊子の本文は3ページである. 印刷の不鮮明な部分, ページの脱落などがあつた場合は申し出ること.
2. 答案用紙には, すべてに受験番号と氏名を記入すること.

記入例

受験 番号	1	2	3	4	5	氏名	大塚 茶織
----------	---	---	---	---	---	----	-------

3. 解答は, それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと.
4. この冊子の余白部分は下書きに使用してもよい.
5. この冊子及び下書き用紙は持ち帰ること.

1 次の条件によって定まる数列 $\{F_n\}$ を考える.

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$\frac{n}{2}$ を越えない最大の整数を $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ と表すとき,

$$F_{n+1} = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} {}_{n-r}C_r \quad (\star)$$

が成り立つことを以下の手順により示せ.

(1) $1 \leq r \leq n-1$ を満たす自然数 r に対し,

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$$

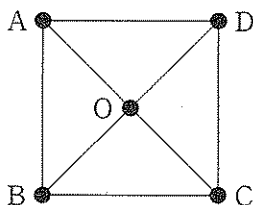
が成り立つことを示せ.

(2) $(\star)$ が $n = 1, 2$ に対して成り立つことを示せ.

(3) すべての自然数 n に対し, $(\star)$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ.

2

5つの点O, A, B, C, Dとそれらをつなぐ8つの線分からなる下図のような図形がある.



この図形の8つの線分をそれぞれ赤か青に塗る方法を1つずつ記した合計 2^8 枚のカード(重複なし)を用意し, その中から1枚を無作為に引くことを考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) A, B, C, Dの4点のうち, 点Oから出発して青の線分のみを通り到達できる点の数が1つであるような塗り方のカードを引く確率を求めよ.
- (2) A, B, C, Dの4点のうち, 点Oから出発して青の線分のみを通り到達できる点の数が3つであるような塗り方のカードを引く確率を求めよ.
- (3) 点Oから出発して青の線分のみを通り到達できる点はA, B, Cであるカードを引いたとする. このとき, A, B, C, Dの4点のうち, 点Oから出発して赤の線分のみを通り到達できる点の数が3つである条件つき確率を求めよ.

3 平面上に点 O を中心とする半径 1 の円をとり、その円上に 2 点 A, B をとる。弧 AB の中心角 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。点 P は弧 AB 上にあり A, B とは異なるものとし、点 P を通る直線 ℓ は、 O を端点とする半直線 OA, OB とそれぞれ点 X, Y で交わるものとする。また、 t を正の実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 与えられた点 P に対して、 $PX : PY = 1 : t$ が成り立つような直線 ℓ がただ 1 つとれることを示せ。
- (2) ℓ を $PX : PY = 1 : t$ が成り立つようにとったとき、 t, θ 、および弧 AP の中心角 α を用いて $\triangle OXY$ の面積 S を表せ。また、 P を動かしたときに S が最大となるための P に関する条件を求めよ。

